

Analiza I

Materiał do wykładu

Grzegorz Andrzejczak

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1}, \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} &= a_n \left(\frac{1}{(2n+1)} + \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)(2n+5)} + \dots \right) \\ &= a_n \left(\left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) + \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+3}\right) + \left(\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} - \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+5)}\right) + \dots \right) \\ &= a_n \left(1 + \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n}{2n+1}\right) + \left(\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} - \frac{2n+1}{2n+3}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)} - \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+5)}\right) + \dots \right) \\ &= a_n \left(1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)(2n+5)(2n+6)} + \dots \right), \\ a_n &< \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2k+1} < a_n \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)\end{aligned}$$

Politechnika Łódzka
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki
Stosowanej
Matematyka stosowana

Analiza I

Materiał do wykładu

Grzegorz Andrzejczak

Łódź – Sokolniki, luty/listopad 2017 – styczeń 2019

Recenzent:
Prof. dr Wojciech Kryszewski

Redaktor Naukowy Wydziału Fizyki Technicznej,
Informatyki i Matematyki Stosowanej:
dr hab. inż. Aneta Poniszewska-Marańda

© Copyright by Politechnika Łódzka 2019

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

tel. 42 631-29-52, 42 631-20-87

fax 42 631-25-38

e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl

www.wydawnictwo.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-984-8

DOI: 10.34658/9788372839848

<https://doi.org/10.34658/9788372839848>

Nakład 100 egz. Ark. druk. 8,0. Papier offset. 80 g 70 × 100
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2292

Spis treści

Spis treści	i
Wstęp	iv
1 Co wiemy o liczbach rzeczywistych?	1
1.1 Aksjomaty dla relacji porządku w \mathbb{R}	1
1.2 Indukcja	5
1.3 Konsekwencje aksjomatu ciągłości	8
2 Na kresach	11
2.1 Kresy zbioru: górny i dolny	11
2.2 Pierwiastki i potęga o wykładniku wymiernym	15
2.3 Potęga o wykładniku rzeczywistym	17
3 Ciągami do granicy	20
3.1 Ciągi liczbowe	20
3.2 Granica ciągu	23
3.3 Ważne przykłady	26
3.4 Własności granic	29
3.5 Ważne przykłady – cd.	31
4 Między granicą dolną i górną	34
4.1 Granice: dolna i górna	35
4.2 Granice niewłaściwe	40
4.3 Podciągi	42
4.4 Ciągi Cauchy’ego	47
4.5 Funkcja wykładnicza – własności	49

5	Do szeregu!	54
5.1	Szeregi liczbowe	54
5.2	Kryteria zbieżności	60
5.3	Rozwinięcie e^x w szereg	65
5.4	Szeregi potęgowe	67
5.5	Co jeszcze wynika z bezwzględnej zbieżności?	70
6	Funkcje z elementarza	74
6.1	Oznaczenia i terminologia	74
6.2	Ciągłość funkcji	77
6.3	Własności funkcji ciągłych	83
6.4	Przykłady funkcji elementarnych	87
6.5	Funkcje monotoniczne i do nich odwrotne	91
6.6	Funkcje trygonometryczne – nieco dokładniej	94
6.7	Szeregi potęgowe jako funkcje	98
7	Ciągłość wg Cauchy’ego	102
7.1	Nieco topologii	102
7.2	Punkty nieciągłości	107
7.3	Granice funkcji	109
7.4	Granice niewłaściwe i asymptoty	114
7.5	Funkcje monotoniczne	120
8	Jak podejść do pochodnej?	124
8.1	Pochodne	124
8.2	Własności pochodnej	130
8.3	Konsekwencje różniczkowalności	134
8.4	Wypukłość funkcji	143
8.5	Reguła de L’Hôpitala	150
8.6	Pochodne wyższych rzędów	154
8.7	Badanie funkcji	157
9	Reszta czyli błąd	162
9.1	Wzór Taylora	162
9.2	Szeregi dwumianowe	166
9.3	Zastosowania do obliczeń numerycznych	171
9.4	Przybliżone wyznaczanie pochodnych	176
9.5	Metody Picarda i Newtona	179

10 Cała całka Riemanna	188
10.1 Konstrukcja	188
10.2 Funkcje całkowalne	196
10.3 Związek całki z pochodną	204
10.4 Interpretacje i zastosowania	211
10.5 Całki niewłaściwe	217
10.6 Metody wyznaczania funkcji pierwotnych	223
11 Miara i narzędzia do mierzenia	233
11.1 Zbiory borelowskie i σ -ciała	234
11.2 Miara Lebesgue'a w \mathbb{R} i \mathbb{R}^2	237
11.3 Funkcje schodkowe	239
11.4 Twierdzenie Lebesgue'a o całkowalności	243
11.5 Całkowanie numeryczne	245
12 Obliczenia numeryczne – zadania	254
13 Spis symboli i skrótów	256
Skorowidz	259
Bibliografia	265

Wstęp

Autor niniejszego tekstu rozpoczynał studia matematyczne w 1973 r. na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego. Kurs *Analizy* w ramach I roku studiów wychodził od aksjomatyki liczb rzeczywistych i wspierany był przez równoległe kursy *Podstaw Logiki i Teorii Mnogości* oraz *Algebry*, w znacznej mierze abstrakcyjnej. Wprawdzie od strony nazw kursów niewiele się w ciągu minionych ponad 40 lat zmieniło, ale zmienili się studenci. Dokładniej – absolwenci szkół średnich dysponują obecnie zupełnie odmiennym bagażem doświadczeń i umiejętności oraz nawyków myślenia, co można nazwać w skrócie „wiedzą”. Po wielu zmianach podstawy programowej w szkołach średnich, po zmianie koncepcji egzaminów maturalnych i tego, jak należy rozumieć egzamin „zdany”, możemy zachwycać się coraz lepszymi wynikami uzyskiwanymi przez młodzież w kolejnych testach – lub niepokoić coraz częściej obserwowanym brakiem umiejętności myślenia abstrakcyjnego, czy też po prostu *logicznego myślenia*. Wykładowcy starający się przedstawić studentom 1–2 roku podstawy myślenia matematycznego zderzają się – po stronie początkujących studentów – z problemami postaci: co różni definicję od twierdzenia? co takiego zawiera dowód, że ma być uznany za uzasadnienie akurat tego, a nie innego twierdzenia? Na czym polega *rozumowanie*, czyli kolejne zdania i wzory prowadzące od wypisanych wcześniej *założeń* do sformułowanej niżej *tezy*? Co to znaczy, że jakieś twierdzenie jest *wnioskiem* z innego?

Zatrzymajmy się przy uproszczonym opisie dość powszechnego, naturalnego dualizmu związanego z nauczaniem matematyki. Podejście *praktyczne*, właściwe dla studiów inżynierskich, zakłada uzyskanie jak najszybszej umiejętności wykonywania poprawnych obliczeń służących rozwiązywaniu konkretnych, coraz bardziej skomplikowanych problemów. Podejście bardziej *teoretyczne*, właściwe dla matematyki jako kierunku studiów, stara się

rozwijać umiejętność analizy grup podobnych zagadnień dla rozpoznawania istotnych analogii i wybór twierdzeń stopniowo prowadzących do rozwiązania. Pierwsza droga wymaga zapamiętania wielu konkretnych sposobów postępowania – przykładów i ćwiczeń, druga – wielu twierdzeń wraz z praktycznym zakresem ich stosowalności.

W prezentowanym czytelnikowi tekście staram się przedstawić w możliwie spójny i prosty sposób podejście zdecydowanie teoretyczne, choć istotną część kursu stanowią rozważania i oszacowania dotyczące praktycznej (czyli także – przybliżonej) obliczalności wprowadzanych stopniowo pojęć. Uprzedzam, że czytelnik nie znajdzie tu jednak *aksjomatycznej konstrukcji* zbioru liczb rzeczywistych. W istocie, przyjmując za punkt wyjścia wiedzę „szkolną” w zakresie podstawowych działań na liczbach rzeczywistych, ograniczamy się do sformułowania jedynie trzech aksjomatów związanych z relacją porządku $x < y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ – resztą zajmuje się przecież każdy równoległy kurs *Algebry*. Pozwala to na stopniowe wprowadzanie niezbędnego w matematyce poziomu precyzji, a celem takiej koncepcji jest obniżenie bariery abstrakcji, jaką dla absolwenta szkoły średniej stanowi niewypowiedziana reguła: zapomnijcie o wszystkim, czego się do tej pory dowiedzieliście o liczbach – Matematyka zaczyna się dopiero teraz.

Wybrane, wyróżnione w tekście aksjomaty (wśród nich aksjomat ciągłości) pozwalają na stopniowe, precyzyjne wprowadzanie klasycznego zbioru pojęć wchodzących w skład podstaw *Analizy* obejmującego kresy $\sup A, \inf A$ zbiorów $A \subset \mathbb{R}$, potęgę a^b liczby $a > 0$ o dowolnym wykładniku rzeczywistym b , ciągi liczbowe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i ich granice $\lim_n a_n$, granice górne $\limsup_n a_n$ i dolne $\liminf_n a_n$ itd.

Zakładam, że z wyjątkiem samego zbioru \mathbb{R} początkujący student znajdzie w prezentowanym tekście definicje wszystkich kolejno wprowadzanych pojęć – jednoznaczne i możliwie proste, odpowiadające na pytanie: co to jest? jak to rozpoznać, sprawdzić, wyznaczyć? Czytelnik bardziej zaawansowany zauważy, że to nieco „karkołomne” zadanie staram się realizować poprzez celowy wybór – spośród dostępnych (równoważnych!) definicji wybieram takie, których treść i wbudowanie w logiczną strukturę kursu wiążą się z minimalnym bagażem przygotowań. Czytelnik bardziej krytyczny oceni, czy uzyskany efekt jest wart wysiłku i choć w części jest zgodny z deklarowanym zamiarem.

Zatrzymałem się przy definicjach, gdyż ich znajomość postrzegam jako filar wszelkiego matematycznego rozumowania, a podstawowym, niestety, problemem studenta na przeciętnym egzaminie jest próba wyjaśnienia, co znaczą symbole i nazwy, których używa. Kolejnym filarem są oczywiście

twierdzenia – formułowane w wersji zgodnej z logiczną strukturą wykładu – niekoniecznie najbardziej ogólnej. Od prezentowanych w tekście twierdzeń (oraz stwierdzeń mniejszej rangi, wniosków i lematów) oczekujemy weryfikowalności założeń, oraz tego, by postulowana teza stanowiła jednostkowy ważny wynik lub – by była możliwa do zastosowania w przykładach i kolejnych, powiązanych logicznie twierdzeniach. Wymaganie, by definicje oraz podstawowy zestaw twierdzeń zostały trwale zapamiętane przez studenta – wraz z logicznymi powiązaniem przyswojonych pojęć – jest zapewne staroświeckie i w świecie Internetu i przy aktualnie obowiązujących koncepcjach metodycznych wydaje się całkowicie nierealistyczne. No cóż, nie każdy student matematyki zostaje matematykiem. Zainteresowani znajdą w tekście także dowody twierdzeń – wszystkich klasycznych i tych trudniejszych. Pominięte zostały – właściwe dla *Algebry* dowody Twierdzeń 10.6.5 i 10.6.4 o rozkładzie: wielomianu na czynniki (st. 1–2), a funkcji wymiernej na ułamki proste. Wyjątek stanowi także sformułowane w ostatnim rozdziale twierdzenie 11.2.2 o istnieniu i jednoznaczności miary Lebesgue’a (na prostej i na płaszczyźnie), którego pełna wersja powinna się pojawić w bardziej zaawansowanym kursie *Teorii miary i całki*. Brak dowodu twierdzenia nie przeszkadza, by korzystać ze stosownej definicji i – w szczególności – by wyznaczać miarę konkretnych, ważnych w analizie zbiorów.

Proponując realny wykład *Analizy I* oparty na przygotowanym tekście zakładam świadomą i dość rozległą redukcję liczby dowodów prezentowanych w ramach wykładu twierdzeń. Dla odmiany, zdecydowanie odradzam pomijanie poszczególnych twierdzeń – zarówno ich treść jak i konsekwencje dające odpowiedzi na pojawiające się wcześniej pytania oraz nadające kierunek dalszym rozdziałom stanowią siatkę powiązań, na której zbudowana jest *Matematyka*, w szczególności *Analiza*, również ta bardziej zaawansowana. Wybrane, bardziej elementarne lub wzorcowe dowody są oczywiście potrzebne już na początku nauki – jeżeli mogą być „zrozumiane”, przyswojone przez początkującego studenta. Zakładam, że materiał wykładowy kursu *Analizy* jest niezbędny w ciągu całego okresu nauki, a po osiągnięciu wyższego poziomu kultury matematycznej student kolejnych lat będzie mógł (i potrzebował) wrócić do poznanego wstępnie materiału, by odszukać szczegóły rozumowania, które na I roku niekoniecznie było dla niego czytelne. Niektóre, szczególnie proste dowody pojawiają w tekście jako ćwiczenia do samodzielnego wykonania (i sprawdzenia w ramach ćwiczeń).

Prezentowany tu kurs *Analizy I* ogranicza się do wybranej grupy tematów obejmujących ciągi, szeregi i tzw. analizę funkcji 1 zmiennej rzeczywistej. Czytelnika szukającego piękna i szerokiego spojrzenia na analizę

zachęcam do przestudiowania pozycji [4] oraz podanej tam bardzo rozległej bibliografii. Za stosunkowo bliskie i inspirujące uważam podejście zawarte w [2]. Ważniejsze różnice w stosunku do klasycznych podręczników *Analizy* – oprócz wspomnianej już redukcji aksjomatyki – sprowadzają się w zasadzie do istotnej zmiany kolejności i nieco odmiennego rozłożenia akcentów. W szczególności:

- Rozdział 1 zawiera dwie wyodrębnione własności zbioru liczb dodatnich i nakazuje je traktować jako aksjomaty. Jest to próba zredukowania – do dwu – standardowych, znanych własności algebraicznych relacji mniejszości (i większości); przy okazji pojawia się pytanie o to, czy zbiór $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ jest jedynym podzbiorem o wyróżnionych własnościach. Dodatkowy *aksjomat ciągłości* oznacza istnienie kresów dolnych – ale tylko w odniesieniu do półprostych ograniczonych z dołu. Dla liczb naturalnych formułujemy charakteryzującą je zasadę indukcji, a dla liczb rzeczywistych definiujemy rozwinięcie dziesiętne. Jest to podstawowy, wykorzystywany w dalszych rozdziałach przykład ciągu i jednocześnie szeregu.
- Szczegółowa konstrukcja potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym zawiera dowód istnienia pierwiastka n -go stopnia i stanowi w rozdziale 2 główne praktyczne zastosowanie kresów (górných i dolnych).
- Pojęcia ciągu i granicy od samego początku korzystają z przykładów, będących w istocie szeregami; rozdział 3 zawiera przedstawienie liczby Eulera e jako granicę każdego z ciągów $(1 + \frac{1}{n})^n$ i $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$, dla $n \in \mathbb{N}$.
- Rozdział 4 wprowadza granice górną i dolną – z wykorzystaniem kresów, bez odniesień do zdefiniowanego później pojęcia punktu skupienia; kulminacją rozdziału jest oczywiście twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, ale także – własności ogólnej funkcji wykładniczej i wzór $e^x = \lim_n (1 + \frac{x}{n})^n$.
- Szeregi pojawiają się w rozdziale 5 jako w szczególny sposób zapisane ciągi liczbowe; właściwe dla szeregów specyficzne metody badania zbieżności rozszerzamy o przekształcenie Abela i kryterium Dirichleta; badając szeregi bezwzględnie zbieżne wyprowadzamy rozwinięcie funkcji e^x dla $x \in \mathbb{R}$ w szereg potęgowy, a dla ogólnych szeregów potęgowych ustalamy pojęcie przedziału zbieżności.
- Rozdział 6 korzysta z pojęcia ciągłości funkcji (w oparciu o ciągową definicję Heinego) i opisuje wynikające stąd własności – w tym

związaną z monotonicznością ciągłość funkcji odwrotnych; przegląd funkcji elementarnych, uzupełniony o jednoznaczłą charakteryzację funkcji *sinus* i *kosinus*, prowadzi do wzorów rozwijających te funkcje w szereg; wykazujemy ciągłość każdej funkcji będącej sumą szeregu potęgowego (w przedziale zbieżności).

- Granice funkcji pojawiają się w rozdziale 7 i są poprzedzone wprowadzeniem do topologii obejmującym zbiory otwarte i domknięte oraz F_σ i G_δ , co pozwala dalej rozważać zbiory punktów nieciągłości dowolnej funkcji; badanie granic (właściwych i niewłaściwych) rozszerza się na asymptoty; rozdział kończy konstrukcja funkcji monotonicznych o dowolnym przeliczalnym zbiorze punktów nieciągłości.
- Pochodna funkcji badana jest w rozdziale 8, gdzie w pierwszej kolejności pokazujemy różniczkowalność każdej funkcji rozwijalnej w szereg potęgowy; własności pochodnej sprawdzamy korzystając z pojęcia funkcji przyrostowych, a ścisły związek różniczkowalności z monotonicznością pozwala na uzyskanie wstępnej wersji wzoru Stirlinga; badanie funkcji obejmuje zestaw twierdzeń związanych z wypukłością, oraz prowadzi do klasycznych reguł de L'Hôpitala wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych.
- Dla funkcji n -krotnie różniczkowalnych definiujemy w rozdziale 9 wielomian Taylora – z resztą w postaci Lagrange'a; nieco odmienne metody potwierdzają zbieżność szeregu dwumianowego – rozwinięcia funkcji potęgowej $(1+x)^a$ dla $|x| < 1, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Obliczenia numeryczne i próby oceny błędów przybliżeń pojawiają się w tekście wielokrotnie, a w rozdziale 9 zostały dodatkowo zebrane i wyodrębnione; wyróżniamy podstawowe metody numerycznego różniczkowania funkcji, a szczegółowo omówione metody Picarda i Newtona stosuje się do przybliżonego rozwiązywania równań.
- Zdefiniowana w rozdziale 10 całka Riemanna korzysta z sum Darboux pomijających wartości funkcji w punktach podziału, co upraszcza niektóre dowody; zestaw podstawowych twierdzeń rachunku całkowego uzupełnia wzór Taylora z resztą całkową. Zastosowania całek obejmują wzory definiujące pole, objętość figur geometrycznych i długość łuku; wyprowadzamy wzór Wallisa i wyznaczamy stałą we wzorze Stirlinga oraz wartość całki Poissona (niewłaściwej) – formułujemy także całkowe kryterium zbieżności szeregu. Rozdział kończy przegląd podstawowych metod wyznaczania całek nieoznaczonych.

- Rozdział 11 otwierają definicje σ -ciał i zbiorów borelowskich (generowanych przez przedziały) oraz miar. Wprowadzenie miary Lebesgue’a – jednoznaczne, bez dowodu istnienia – ustala precyzyjny związek całki Riemanna z polem, czyli miarą zbioru w \mathbb{R}^2 ; z kolei pojęcie miary na prostej \mathbb{R} pozwala na sformułowanie i dowód twierdzenia Lebesgue’a charakteryzującego funkcje całkowalne w sensie Riemanna. Końcowy podrozdział zawiera szczegółowy opis trzech podstawowych metod całkowania numerycznego.

Prezentowany tekst zawiera także minimalny wstęp do analizy numerycznej, w oparciu o dostępne oprogramowanie pozwalające na wykonywanie obliczeń z ustaloną dokładnością. W miarę pojawiania się kolejnych pojęć i wielkości – takich jak $\sqrt{2}$, e , $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$, π , $\ln(2)$, $2^{\sqrt{2}}$ itp. – podawane są metody ich przybliżonego wyznaczania, wraz z oceną dokładności i porównaniem tempa zbieżności dostępnych metod. Wszystkie tego typu zadania zostały zebrane w rozdziale 12.

Życzę przyjemnej, uważnej lektury
 Grzegorz Andrzejczak
 Łódź – Sokolniki, styczeń 2019

Rozdział 1

Co wiemy o liczbach rzeczywistych?

W obrębie działu matematyki zwanego *Analizą* traktujemy pojęcie liczby rzeczywistej jako *znane*, a zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy zwyczajowo symbolem \mathbb{R} . Zakładamy zatem, że czytelnik (czytelniczka, słuchacz/-ka) zna podstawowe działania i ich własności: dodawanie i odejmowanie oraz mnożenie i dzielenie.

1.1 Aksjomaty dla relacji porządku w \mathbb{R}

Nierówności nie są skomplikowanym pojęciem i nie zamierzamy wymyślać nowego, lepszego, czy „bardziej zaawansowanego” sposobu porównywania liczb rzeczywistych. Ponieważ jednak nierówności pełnią w części kursu oznaczonej jako *Analiza I* wyjątkowo ważną rolę, skupiamy się na nich, aby to znane pojęcie opisać w nieco inny sposób.

Porównanie dowolnej liczby rzeczywistej z liczbą 0 prowadzi natychmiast do wyróżnienia *liczb dodatnich* czyli większych od zera. Dla zbioru liczb dodatnich $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ zatrzymamy się przy dwu raczej oczywistych własnościach:

ORD 1. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x \in \mathbb{R}^+$, albo $-x \in \mathbb{R}^+$, albo $x=0$.

ORD 2. Jeśli $x, y \in \mathbb{R}^+$, to $x + y \in \mathbb{R}^+$ i $xy \in \mathbb{R}^+$.

Oczywiście, w takim samym stopniu wyróżniony jest zbiór liczb ujemnych, ale w jego przypadku związek z dodawaniem i mnożeniem nie jest równie prosty.

Będziemy traktować własności **ORD 1**–**ORD 2** jako aksjomaty, czyli podstawowe własności niewymagające dowodu. Dlaczego akurat te? Głównym powodem jest to, że nie odwołując się do pojęcia nierówności pozwalają wyprowadzić wszystkie inne elementarne własności tej relacji – począwszy od definicji. Wyróżniamy zatem zbiór $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ spełniający warunki **ORD 1**–**ORD 2** i przyjmujemy

Definicja 1.1.1. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartością bezwzględną (lub modulem) nazywamy liczbę 0, gdy $x = 0$, a dla $x \neq 0$ tę spośród liczb $x, -x$, która należy do zbioru \mathbb{R}^+ . Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$.

Definicja 1.1.2. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mówimy, że liczba x jest mniejsza od y , co zapisujemy jako $x < y$, jeśli $y - x \in \mathbb{R}^+$. Liczba x jest większa od y , co zapisujemy jako $x > y$, jeśli $x - y \in \mathbb{R}^+$.

Oczywiście, nierówność $x > y$ jest równoważna $y < x$. Powszechnie stosowane są także oznaczenia

$$x \leq y \equiv (x < y \text{ lub } x = y) \quad x \geq y \equiv (x > y \text{ lub } x = y).$$

Stwierdzenie 1.1.1 (Postawowe własności relacji mniejszości). Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $x = y$, albo $x < y$, albo $y < x$. Ponadto

- (i) $x < y$ i $y < z \implies x < z$, (przechodność)
- (ii) $x < y \implies x + z < y + z$ dla $z \in \mathbb{R}$,
- (iii) $x < y$ i $z > 0 \implies xz < yz$ i $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$,

Dowód. Sprawdzenie tego, że podane wyżej własności (znane – nic nowego) dają się wyprowadzić z **ORD 1**–**ORD 2**, z wykorzystaniem podstawowych własności działań, jest pouczającym przykładem metody wykorzystywanej w matematyce: precyzujemy definicje, sprawdzamy, że ich konsekwencje są zgodne z intuicją (lub wcześniejszą wiedzą), by w końcu dotrzeć do problematyki, w której sama intuicja lub tzw. zdrowy rozsądek nie wystarczają. Pozostawiamy szczegóły czytelnikowi (... i wykładowcy). \square

Ćwiczenie 1.1.1. Wyprowadzić z (ii) własność $x < y \implies -y < -x$, a z (iii) własność $0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Podział liczb rzeczywistych na dodatnie (należące do \mathbb{R}^+), liczbę 0 i liczby ujemne formalizuje funkcja *signum* (znak), która każdej liczbie $x \in \mathbb{R}$ przypisuje wartość $\text{sgn}(x) \in \{1, 0, -1\}$ określoną wg prostej reguły

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Stwierdzenie 1.1.2. (i) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \text{sgn}(x)x$.

(ii) Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $|xy| = |x||y|$, oraz tzw. nierówność trójkąta

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

W dalszej części wykładu, korzystając z nierówności, będziemy odwoływać się raczej do powszechnie przyjętych, wyszczególnionych w Stwierdzeniach 1.1.1 i 1.1.2 własności, niż – bezpośrednio – do Definicji 1.1.2.

Uwaga 1.1.1. Uważny i krytyczny czytelnik zauważył zapewne, że wprowadzenie zbiór liczb dodatnich pozwala zdefiniować relacje większości i mniejszości, ale sam powstał z wykorzystaniem takiej właśnie relacji – jako zbiór liczb $x > 0$. Postawmy zatem problem: czy jest prawdą, że zbiór \mathbb{R}^+ jest *jedynym* podzbiorem $P \subset \mathbb{R}$ scharakteryzowanym przez własności analogiczne do **ORD 1–ORD 2**, a więc takim, że

1. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x \in P$, albo $-x \in P$, albo $x = 0$, oraz
2. Jeśli $x, y \in P$, to $x + y \in P$ i $xy \in P$?

Szukając odpowiedzi zauważamy, że z własności **1.–2.** wynika, iż dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \neq 0$, jedna z liczb $x, -x$ należy do P , a zatem kwadrat $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$ jest iloczynem dwu liczb z P i, jako taki, w każdym przypadku należy do P . Jeśli zatem zgodzimy się, że każda liczba dodatnia $y \in \mathbb{R}^+$ jest kwadratem liczby \sqrt{y} , to dochodzimy do wniosku, że P zawiera wszystkie liczby dodatnie. Z **1.** wynika, że liczby ujemne są poza P , a więc $P = \mathbb{R}^+$ jest zbiorem wszystkich liczb dodatnich.

Przedstawione tu rozumowanie korzysta z założenia, że dla każdej liczby dodatniej x istnieje liczba \sqrt{x} . W matematyce szkolnej jest to uznany fakt, ale jego oczywistość zaburza choćby pytanie: ile, tak *naprawdę*, wynosi $\sqrt{2}$?

Spróbujmy zawiesić, odłożyć wspomniane założenie, tzn. nie korzystajmy z niego, dopóki nie zostanie udowodnione. Co nam pozostaje? Nie znając dokładnie postaci zbioru P , wiemy, że $1 \in P$, skoro liczba 1 jest swoim

własnym kwadratem. Z **2.** wynika zatem, że P zawiera wszystkie liczby naturalne – każda jest skończoną sumą *jedynek*. Z kolei dla dowolnej liczby wymiernej postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi, możemy skorzystać z implikacji

$$\frac{m}{n} \cdot n = m \in P \implies \frac{m}{n} \in P,$$

gdyż z przypuszczenia, że może być inaczej, a więc $-\frac{m}{n} \in P$, wynikałaby sprzeczność $-m \in P$. Podsumowując, stwierdzamy, że każdy zbiór P spełniający warunki **1.**–**2.** zawiera wszystkie dodatnie liczby wymierne. Do pełnego sukcesu – wszystkich liczb dodatnich – brakuje nie tak wiele, ale widać też, że niekoniecznie chodzi tu o potencjalnie możliwy „brak pierwiastków”, skoro wiemy już, że np. $2, 3, 5 \in P$, mimo że nie badaliśmy pierwiastków z tych liczb. Rozwiązaniem będzie sformułowany nieco później tzw. *aksjomat ciągłości*, pozwalający na wypełnianie liczbami rzeczywistymi luk występujących pomiędzy liczbami wymiernymi.

Ćwiczenie 1.1.2. Znaleźć (np. w Internecie) dowolny dowód faktu, że nie ma liczby wymiernej, której kwadrat jest równy 2. Sprawdzić poprawność rozumowania.

Przyjmujemy klasyczne oznaczenia przedziałów *skończonych*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \quad \text{itd.}$$

– otwartych, otwarto-domkniętych itp. – dla dowolnych liczb $a \leq b$, oraz *nieskończonych otwartych*

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$$

i *domkniętych*

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\},$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Przedział nazywamy (jednostronnie) *domkniętym*, jeśli zawiera wskazany koniec – jako liczbę, odpowiednio, najmniejszą lub największą. Przedział jest *otwarty*, jeśli nie zawiera swych końców.

Użyte tu symbole nieskończoności nie są liczbami i nie występują w charakteryzujących przedziały nierównościach. Oznaczenie

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

jest wprowadzić nieco ekstrawaganckie, pozwala jednak traktować cały zbiór \mathbb{R} jako specyficzny nieskończony przedział.

Ćwiczenie 1.1.3. Sprawdzić, że przedział (a, b) jest zbiorem niepustym wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$. Co wiadomo o liczbie $c = \frac{a+b}{2}$?

Sygnalizowana wcześniej, dodatkowa własność relacji mniejszości $<$, zwana *aksjomatem ciągłości*, może być teraz sformułowana w postaci

ORD 3. Każdy niepusty i różny od \mathbb{R} podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że dla dowolnych liczb $x \in A$ i $y \in \mathbb{R}$,

$$x < y \implies y \in A,$$

jest przedziałem nieograniczonym postaci $A = [a, \infty)$ lub $A = (a, \infty)$, dla pewnej liczby rzeczywistej a .

Końcowa postać zbioru A oznacza, że istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że A zawiera wszystkie liczby $x > a$ i nie zawiera żadnej liczby $y < a$. To, czy A jest przedziałem domkniętym, czy nie, zależy od tego, czy $a \in A$, czyli – czy w zbiorze A istnieje liczba *najmniejsza*.

Ćwiczenie 1.1.4. Sformułować analogiczną własność charakteryzującą zbiory postaci $(-\infty, a)$ lub $(-\infty, a]$. Sprawdzić równoważność obu własności.

Przyjmujemy aksjomat ciągłości **ORD 3** bez dowodu, jako aksjomat. Wykorzystamy go w pierwszej kolejności do uściślenia wzajemnych relacji pomiędzy liczbami rzeczywistymi, a liczbami naturalnymi.

1.2 Indukcja

Przypominamy, że zbiór *liczb naturalnych*, oznaczany jako \mathbb{N} , jest ściśle związany z następującą klasyczną własnością.

Zasada indukcji. Każdy podzbiór $S \subset \mathbb{N}$ spełniający warunki

- $1 \in S$, oraz
- $s + 1 \in S$, jeśli tylko $s \in S$, czyli $\forall_{s \in S} s + 1 \in S$,

jest równy \mathbb{N} , a więc zawiera wszystkie liczby naturalne.

W kontekście badania liczb rzeczywistych, ważny jest dla nas także

Wniosek 1.2.1. Zbiór *liczb naturalnych* \mathbb{N} jest najmniejszym zbiorem liczb rzeczywistych $X \subset \mathbb{R}$, zawierającym liczbę 1 i spełniającym warunek

$$x + 1 \in X \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Precyzujemy, że *najmniejszy* spośród zbiorów o pewnej własności zawiera się w każdym zbiorze mającym daną własność i sam również tę własność posiada. Zbiór najmniejszy, jeśli istnieje, jest dokładnie jeden [Wstęp do LiTM].

Dowód. Jeśli X jest dowolnym podzbiorem w \mathbb{R} o własnościach podanych we wniosku, to zbiór $S = X \cap \mathbb{N}$ spełnia warunki zasady indukcji i – wobec tego – jest równy \mathbb{N} . Stąd $\mathbb{N} = X \cap \mathbb{N} \subset X$, co było do okazania. \square

W bardziej abstrakcyjnym podejściu, które staramy się w prezentowanym kursie ograniczać do niezbędnego minimum, zasada indukcji oraz sformułowana wyżej jednoznaczna charakteryzacja zbioru \mathbb{N} są podstawą definicji, czyli precyzyjnego wyjaśnienia: *co to są liczby naturalne?*

Ćwiczenie 1.2.1. Sprawdzić, że zbiór liczb całkowitych

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

jest najmniejszym podzbiorem liczb rzeczywistych zawierającym *jedynkę* i takim, że $x + y, x - y \in \mathbb{Z}$ dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{Z}$.

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, utworzony z wszystkich ułamków postaci $\frac{p}{q}$, dla $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, jest podobnie najmniejszym podzbiorem, w którym wykonalne jest także mnożenie i dzielenie przez liczby różne od 0.

Symbol \mathbb{C} nie oznacza liczb całkowitych lecz wiąże się z nieco bardziej zaawansowanym pojęciem *liczb zespolonych*. Liczby zespolone wykraczają poza \mathbb{R} i nie dają się porównywać – relacja $<$ nie jest dla nich zdefiniowana.

Zasada indukcji pozwala uzasadnić (czyli udowodnić!) następującą prostą własność zbiorów skończonych.

Stwierdzenie 1.2.2. *Każdy skończony, niepusty podzbiór A liczb rzeczywistych zawiera liczbę największą (nazywaną maksimum) i liczbę najmniejszą (minimum zbioru).*

Przyjmujemy klasyczne oznaczenia $\max A$ dla *maksimum* i $\min A$ dla *minimum* zbioru A .

Dowód. Należy pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wyróżnione elementy istnieją w każdym zbiorze n -elementowym $B \subset \mathbb{R}$. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Dla ustalonego n , jeśli badana własność przysługuje wszystkim zbiorom n -elementowym, a zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma $n + 1$ elementów, to ustalając dowolny element $a \in A$ stwierdzamy, że n -elementowy zbiór $B = A \setminus \{a\}$ zawiera, z założenia, liczby $\max B$ i $\min B$. Jeśli $a \leq \max B$, to liczba $\max B \in B$

jest największa w całym zbiorze A , jeśli zaś $a > \max B$, to $\max A = a$. W analogiczny sposób wykazujemy, że mniejsza (niewiększa) z liczb a , $\min B$ jest najmniejszą liczbą w zbiorze A . Wykazaliśmy tym samym, że badana własność przysługuje wszystkim zbiorom $(n+1)$ -elementowym. Na mocy zasady indukcji – maksimum i minimum istnieją w każdym skończonym zbiorze liczb rzeczywistych. \square

Jako klasyczny, ważny przykład zastosowania zasady indukcji podajemy

Twierdzenie 1.2.3 (Wzór dwumianowy Newtona). *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$, zachodzi równość*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (1.2)$$

w której współczynniki Newtona $\binom{n}{k}$ wyznaczone są za pomocą wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (1.3)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$. \square

Przykład 1.2.1. Jeśli liczby $a_1, \dots, a_n \geq -1$ są tego samego znaku, to

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + (a_1 + \dots + a_n). \quad (1.4)$$

Istotnie, dla $n=1$ nierówność jest równością, natomiast jeśli zachodzi nierówność $(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geq 1 + b_n$, gdzie $b_n = a_1 + \dots + a_n$, to

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \geq (1+b_n)(1+a_{n+1}) \geq 1 + b_n + a_{n+1}.$$

Wniosek 1.2.4. Dla $a \geq -1$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \quad \square$$

... i jeszcze jeden klasyczny przykład jako

Ćwiczenie 1.2.2. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.5)$$

1.3 Konsekwencje aksjomatu ciągłości

Wracamy do nierówności i liczb naturalnych. Istota podanego niżej twierdzenia sprowadza się do stwierdzenia faktu, że dowolnie duże liczby rzeczywiste (np. opisujące odległości międzygalaktyczne) są osiągalne za pomocą liczb naturalnych, a więc w drodze skończonej liczby operacji „dodawania 1”, natomiast dowolnie małe odległości można mierzyć za pomocą liczb postaci $\frac{1}{n}$, powstałych z 1 przez podział na dostatecznie dużo równych części.

Twierdzenie 1.3.1. (i) *Nie istnieje liczba rzeczywista M taka, że $M \geq n$, dla wszystkich liczb naturalnych n .*

(ii) *Jeśli liczba $m \geq 0$ jest mniejsza niż każda liczba postaci $\frac{1}{n}$, dla $n \in \mathbb{N}$, to $m = 0$.*

Dowód. Gdyby w \mathbb{R} istniała liczba większa od wszystkich liczb naturalnych, to zbiór

$$Z = \{M \in \mathbb{R}; n \leq M \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N}\}$$

byłby niepusty i spełniał założenia **ORD 3**, a więc byłby przedziałem nieskończonym o początku $a \in \mathbb{R}$. Należąca do Z liczba $a + \frac{1}{2}$ byłaby zatem większa od każdej liczby naturalnej, podczas gdy dla nienależącej do Z liczby $a - \frac{1}{2}$ istniałaby większa od niej liczba $N \in \mathbb{N}$. Wynikają stąd nierówności

$$a - \frac{1}{2} < N \leq a + \frac{1}{2} < N + 1,$$

z których ostatnia zaprzecza przynależności $a + \frac{1}{2} \in Z$. Do sprzeczności doprowadziło przypuszczenie, że Z jest zbiorem niepustym.

Własność (ii) wynika bezpośrednio z (i) – nierówność $m > 0$ oznaczałaby, że liczba $\frac{1}{m}$ jest większa od wszystkich liczb naturalnych. \square

Pierwszą, dość oczywistą konsekwencją udowodnionego twierdzenia jest możliwość zdefiniowania funkcji *część całkowita* $[\cdot]$. Dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 1$, zbiór liczb naturalnych ograniczonych (z góry) przez x , czyli $\{n \in \mathbb{N}; n \leq x\}$ jest niepustym zbiorem skończonym, a więc ma element maksymalny, największy, który oznaczamy jako $[x] = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq x\}$. Dla dowolnych liczb rzeczywistych korzystamy z liczb całkowitych \mathbb{Z} i przyjmujemy

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}. \quad (1.6)$$

Jest to jedyna liczba całkowita taka, że

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{lub, równoważnie,} \quad x - 1 < [x] \leq x. \quad (1.7)$$

Ćwiczenie 1.3.1. Sprawdzić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zbiór nieskończony $\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$ zawiera element największy. Wykazać równość

$$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m \quad \text{dla dowolnego } m \in \mathbb{Z} \text{ i } x \in \mathbb{R}.$$

Traktując część całkowitą $\lfloor x \rfloor$ liczby x jako jej „przybliżenie z dokładnością do 1” (jedno z możliwych), możemy z łatwością skonstruować *rozwiniecie dziesiętne* (1.9) liczby rzeczywistej. Dla ustalonej, dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$, korzystając z nierówności $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, przyjmujemy

$$a_1 := \lfloor 10(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad x_1 := \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10},$$

co zgodnie z (1.7) oznacza nierówności

$$0 \leq 10(x - \lfloor x \rfloor) - a_1 < 1, \quad \text{a więc także} \quad 0 \leq x - x_1 < \frac{1}{10}.$$

Jeśli założymy, że cyfry $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ oraz liczby $x_k \leq x$ są już zdefiniowane (wskazane) dla $k \leq n$, przy czym spełnione są zależności

$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{i} \quad x_n = x_{n-1} + \frac{a_n}{10^n}, \quad (1.8)$$

gdzie korzystamy także z oznaczenia $x_0 = \lfloor x \rfloor$, to kładąc

$$a_{n+1} := \lfloor 10^{n+1}(x - x_n) \rfloor, \quad x_{n+1} := x_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}},$$

skutecznie rozszerzamy definicję a_k i x_k na $k = n + 1$. Na mocy zasady indukcji stwierdzamy, że zależności (1.8), podobnie jak równość

$$x_n = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \quad (1.9)$$

są prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.3.1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ równość (1.9) nazywamy *rozwinieniem dziesiętnym* liczby $x \in \mathbb{R}$ – z dokładnością do n cyfr po przecinku.

Uprzedzając stosowne definicje, przedstawiliśmy tym samym dowolną liczbę rzeczywistą x jako *granice* $x = \lim_n x_n$ ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożonego z liczb wymiernych, oraz jako sumę nieskończonego szeregu $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Możliwość przybliżania dowolnej liczby rzeczywistej x przez wskazane wyżej liczby wymierne postaci x_n prowadzi do ważnej własności liczb wymiernych.

Wniosek 1.3.2. Każdy niepusty przedział (x, y) liczb rzeczywistych zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Dowód. Jeśli przedział (x, y) jest niepusty, to $x < y$ i przedział zawiera swój środek $z = \frac{x+y}{2}$, przy czym $(x, y) = (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$, dla $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. Zgodnie z (1.8), liczba wymierna z_n stanowiąca n -te rozwinięcie dziesiętne liczby z mieści się w przedziale (x, y) , gdy tylko $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Ma to miejsce wtedy, gdy $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$, co wynikająca z Wniosku 1.2.4 nierówność $10^n \geq 1 + 9n$ pozwala zredukować do warunku $1 + 9n > \frac{1}{\varepsilon}$. Zatem $z_n \in (x, y)$ dla $n > \frac{1-\varepsilon}{9\varepsilon}$. Wykazaliśmy, że przedział otwarty (x, y) zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną $a_1 = z_n$. Zasada indukcji pozwala zdefiniować w przedziale (x, y) ciąg różnych liczb wymiernych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takich, że $a_n \in (x, a_{n-1})$ dla $n \geq 2$. \square

Ćwiczenie 1.3.2. Zastąpienie w przedstawionej wyżej konstrukcji liczby 10 przez liczbę 2 prowadzi do *rozwinięcia binarnego* dowolnej liczby x . W tym przypadku znalezienie kolejnej cyfry $a_n \in \{0, 1\}$ rozwinięcia oznacza sprawdzenie pojedynczego warunku:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 2^n(x - x_{n-1}) < 1 \\ 1 & \text{gdy } 2^n(x - x_{n-1}) \geq 1. \end{cases}$$

Korzystając z podanej reguły, znaleźć pięć kolejnych cyfr rozwinięcia binarnego liczby $x = \sqrt{2}$. Jaka jest dokładność uzyskanego przybliżenia?

Rozdział 2

Na kresach

W poprzednim podrozdziale pojawiło się kilka pojęć wymagających precyzyjnych definicji.

2.1 Kresy zbioru: górny i dolny

Definicja 2.1.1. Dowolny niepusty podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeśli istnieje liczba M taka, że wszystkie liczby $a \in A$ spełniają nierówność $a \leq M$. Każda liczba M o takiej własności jest ograniczeniem górnym zbioru A .

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeśli istnieje liczba $m \in \mathbb{R}$ taka, że wszystkie liczby $a \in A$ spełniają nierówność $a \geq m$; liczba m jest wówczas ograniczeniem dolnym zbioru A . Za ograniczony uważamy każdy zbiór ograniczony z dołu i z góry. Zbiór, dla którego nie istnieje stosowne ograniczenie nazywamy oczywiście nieograniczonym (z dołu lub z góry).

Ćwiczenie 2.1.1. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego sprawdzenia, że niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest nieograniczony z góry wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $M \in \mathbb{R}$ istnieje w A liczba $a > M$. Sformułować i sprawdzić analogiczną charakteryzację zbiorów nieograniczonych z dołu.

Podane niżej twierdzenie jest często uważane za alternatywną, równoważną formę aksjomatu ciągłości **ORD 3** i stanowi podstawę dla wprowadzenia pojęć kresów zbiorów.

Twierdzenie 2.1.1. W zbiorze ograniczeń górnych

$$\mathcal{S}(A) = \{M \in \mathbb{R}; a \leq M \text{ dla } a \in A\} \quad (2.1)$$

dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry istnieje liczba najmniejsza.

Jeśli zbiór A jest ograniczony z dołu, to w zbiorze ograniczeń dolnych

$$\mathcal{I}(A) = \{m \in \mathbb{R}; a \geq m \text{ dla } a \in A\} \quad (2.2)$$

istnieje liczba największa.

Dowód. Zgodnie z przyjętym aksjomatem ciągłości, istnieje liczba $M_A \in \mathbb{R}$ taka, że zbiór $\mathcal{S}(A)$ jest przedziałem nieograniczonym o początku M_A . Przyopuszczenie, że liczba M_A nie jest ograniczeniem górnym i $M_A \notin \mathcal{S}(A)$, implikuje istnienie w A liczby $a > M_A$. Oznacza to wzajemnie sprzeczne własności liczby $M' = \frac{1}{2}(M_A + a) > M_A$. Byłaby to zatem liczba należąca do zbioru $\mathcal{S}(A)$, niebędąca ograniczeniem górnym – sprzeczność.

Analogiczny dowód własności zbioru ograniczeń dolnych $\mathcal{I}(A)$ pozostawiamy czytelnikowi. \square

Definicja 2.1.2. Kresem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry nazywamy liczbę

$$\sup A = \min \mathcal{S}(A) \quad (2.3)$$

będącą najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A . Kresem dolnym zbioru ograniczonego z dołu $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$\inf A = \min \mathcal{I}(A) \quad (2.4)$$

będącą największym ograniczeniem dolnym zbioru A .

Tradycyjnie przyjmujemy także oznaczenie $\sup A = \infty$ dla zbioru A nieograniczonego z góry, oraz $\inf A = -\infty$ dla zbioru A nieograniczonego z dołu.

Twierdzenie 2.1.2 (Podstawowe nierówności dla kresów). *Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\inf A \leq \sup A$. Jeśli $A \subset B \subset \mathbb{R}$, to*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Dowód. Jeśli $A \neq \emptyset$, to wybierając dowolny element $a \in A$ stwierdzamy nierówność

$$\inf A \leq a \leq \sup A$$

wynikające z przynależności kresów do właściwego ze zbiorów $\mathcal{I}(A), \mathcal{S}(A)$. Jeśli A jest podzbiorem ograniczonego z góry zbioru B , to liczba $\sup B$ należy do zbioru $\mathcal{S}(A)$ – jako jedno z ograniczeń zbioru A ; stąd nierówność $\sup A \leq \sup B$. Analogiczne rozumowanie dotyczy kresów dolnych. \square

Uwaga 2.1.1. Jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}$ zawiera liczbę *największą*, to jest ona kresem górnym zbioru. W tym przypadku $\sup A = \max A$. Analogicznie, $\inf A = \min A$, o ile w zbiorze A istnieje liczba *najmniejsza*. W szczególności, taka sytuacja zachodzi w przypadku, gdy zbiór A jest skończony (i niepusty).

Dla zbiorów nieskończonych skończone wartości kresów charakteryzuje

Twierdzenie 2.1.3. *Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczeniem górnym zbioru A , a dla każdej liczby $M' < M$ istnieje element $a \in A$ taki, że $a > M'$. Tzn.*

$$M = \sup A \iff \left(\forall_{a \in A} a \leq M \quad i \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > M - \varepsilon \right).$$

Ograniczenie dolne $m \in \mathbb{R}$ zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest kresem dolnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $m' > m$ istnieje element $a \in A$ taki, że $a < m'$, tzn.

$$m = \inf A \iff \left(\forall_{a \in A} a \geq m \quad i \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < m + \varepsilon \right). \quad \square$$

Przykład 2.1.1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$, podana w poprzednim podrozdziale konstrukcja rozwinięcia dziesiętnego prowadzi w szczególności do zbioru $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, którego kresem górnym jest liczba x . Uzasadniające to nierówności

$$x - \frac{1}{10^n} < x_n \leq x \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

wynikają z (1.8). Analogiczne nierówności

$$x < x_n + \frac{1}{10^n} \leq x + \frac{1}{10^n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

dowodzą, że x jest także kresem dolnym zbioru $\{x_n + \frac{1}{10^n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Następujące twierdzenie uogólnia powyższe obserwacje i formalizuje możliwość wyznaczania kresów $\sup B$ i $\inf B$ dowolnych nieskończonych zbiorów $B \subset \mathbb{R}$, z wykorzystaniem specyficznych podzbiorów $A \subset B$ lub ogólniej zbiorów *współkońcowych*, co precyzuje poniższe

Twierdzenie 2.1.4 (Kryterium porównawcze dla kresów). *Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami.*

(i) *Nierówność $\sup A \leq \sup B$ zachodzi, jeśli dla każdej liczby $a \in A$ zbiór B zawiera liczbę b , taką że $a \leq b$, tzn.*

$$\forall_{a \in A} \exists_{b \in B} a \leq b \implies \sup A \leq \sup B. \quad (2.5)$$

$$(ii) \quad (A \subset B \text{ i } \forall b \in B \exists a \in A b \leq a) \implies \sup A = \sup B.$$

(iii) Nierówność $\inf A \geq \inf B$ zachodzi, jeśli dla każdej liczby $a \in A$ zbiór B zawiera liczbę b , taką że $a \geq b$, tzn.

$$\forall a \in A \exists b \in B a \geq b \implies \inf A \geq \inf B. \quad (2.6)$$

$$(iv) \quad (A \subset B \text{ i } \forall b \in B \exists a \in A b \geq a) \implies \inf A = \inf B.$$

Dowód. (i) Jeśli $\sup B = \infty$, nierówność $\sup A \leq \sup B$ jest oczywista. Założmy zatem, że zbiór B jest ograniczony z góry. Z warunku stanowiącego lewą stronę implikacji (2.5) wynika, że każda liczba $M \in \mathcal{S}(B)$ jest także ograniczeniem górnym zbioru A , a więc zachodzi inkluzja $\mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A)$. W szczególności, dla najmniejszych elementów w obu zbiorach wynika stąd nierówność $\sup B \geq \sup A$.

Własność (ii) jest prostym wnioskiem z (i), skoro z inkluzji $A \subset B$ wynika nierówność $\sup A \leq \sup B$, a z drugiej części założenia – nierówność przeciwna $\sup B \leq \sup A$.

(iii) Możemy założyć, że zbiór B jest ograniczony z dołu. Przy podanym założeniu każda liczba $m \in \mathcal{I}(B)$ jest także ograniczeniem dolnym zbioru A , a więc $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(A)$. W szczególności, dla największych elementów w obu zbiorach wynika stąd nierówność $\inf B \leq \inf A$.

Jak wyżej, własność (iv) wynika bezpośrednio z (iii). \square

Pojęcia kresu dolnego i górnego (i ich własności) pozwalają na następującą charakteryzację przedziałów liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 2.1.5. *Dowolny podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$\forall a, b \in A \quad a < b \implies [a, b] \subset A. \quad (2.7)$$

Zbiór A jest wówczas przedziałem lewostronnie domkniętym, gdy $\inf A \in A$, a prawostronnie domkniętym, gdy $\sup A \in A$.

Dowód. Jest oczywiste, że każdy przedział ma własność 2.7. Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}$ spełnia podany wyżej warunek. Chcemy pokazać, że A jest jednym z przedziałów zdefiniowanych w \mathbb{R} – możemy założyć, że $A \neq \emptyset$. Przyjmijmy $m = \inf A$ i $M = \sup A$ – dopuszczając przy tym, dla wygody i uproszczenia notacji, wielkości $m = -\infty$ oraz $M = \infty$. Zauważmy, że A zawiera przedział (m, M) . Istotnie, dla dowolnej liczby $x \in (m, M)$ z nierówności $x > \inf A$ wynika istnienie $a \in A$ takiego, że $a < x$, natomiast z nierówności $x < \sup A$ – istnienie $b \in A$ takiego, że $b > x$. Stąd

$$x \in [a, b] \subset A \quad \text{dla dowolnego } x \in (m, M).$$

Ponieważ różnica $A \setminus (m, M)$ ogranicza się co najwyżej do liczb $m, M \in \mathbb{R}$, zbiór A jest jednym z przedziałów o takich właśnie końcach. \square

2.2 Pierwiastki i potęga o wykładniku wymiernym

Korzystając z faktu, iż aksjomat ciągłości gwarantuje istnienie kresów wszelkich ograniczonych zbiorów w \mathbb{R} , wykażemy teraz istnienie i jednoznaczność pierwiastka $\sqrt[n]{a}$ dowolnego stopnia naturalnego $n \geq 2$ z liczby $a \geq 0$.

Twierdzenie 2.2.1 (O pierwiastkowaniu). *Dla dowolnej liczby rzeczywistej nieujemnej $a \geq 0$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ kres górny*

$$x = \sup\{z \geq 0; z^n \leq a\} \quad (2.8)$$

jest jedyną liczbą nieujemną, dla której zachodzi równość $x^n = a$.

Definicja 2.2.1. *Dla $n \geq 2$ i $a \geq 0$, jedyną liczbę nieujemną $x \in \mathbb{R}$ taką, że $x^n = a$, nazywamy pierwiastkiem n -go stopnia z liczby a i oznaczamy $x = \sqrt[n]{a}$.*

W części dowodu dotyczącej jednoznaczności skorzystamy z pomocniczej własności oznaczającej ściśle monotoniczność operacji potęgowania.

Lemat 2.2.2. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x > y$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 < x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y). \quad (2.9)$$

Dowód. Z tożsamości $x^n - y^n = (x^{n-1} + \dots + y^{n-1})(x - y)$ wynika monotoniczność $x^n > y^n$, dla każdego n , a zatem także oszacowanie

$$x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \dots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1} \leq nx^{n-1}$$

dla pierwszego z czynników. \square

Dowód Twierdzenia 2.2.1. Przypadek $a = 0$ nie wymaga dowodu. Dla ustalonych $n \geq 2$ i $a > 0$, zauważmy, że zbiór $Z = \{z \geq 0; z^n \leq a\}$ jest niepusty i ograniczony z góry przez liczbę $\max\{1, a\}$. Istotnie, jeśli $a \leq 1$, to każda liczba $z \in Z$ spełnia warunek $z^n \leq 1 = 1^n$, więc $z \leq 1$, zgodnie z Lematem 2.2.2. W przypadku, gdy $1 < a$, a więc także $a < a^n$, nierówności $z^n \leq a < a^n$ implikują $z < a$. Dla dowodu, że szukanym pierwiastkiem x jest

kres górny zbioru Z , zgodnie ze wzorem (2.8), wykażemy w pierwszej kolejności nierówność $x^n \leq a$. Gdyby zachodziła nierówność przeciwna $x^n > a$, to przyjmując

$$h := \frac{x^n - a}{nx^{n-1}} > 0, \quad \text{przy czym} \quad x - h = \frac{(n-1)x^n + a}{nx^{n-1}} > 0,$$

otrzymalibyśmy dla $y := x - h$ nierówność $y^n \geq x^n - nx^{n-1}h = a$, zgodnie z (2.9). Ponieważ $y < \sup Z$, istnieje liczba $z \in Z$, taka że $y < z$, a to oznacza nierówność $y^n < z^n \leq a$ – sprzeczność.

Do kolejnej sprzeczności prowadzi przypuszczenie, że $x^n < a$. Istotnie, dla $g \in [0, 1]$ prawdziwe jest oszacowanie

$$(x+g)^n = x^n + nx^{n-1}g + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}g^2 + \dots + g^n \leq x^n + g \cdot M,$$

gdzie $M = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \dots + 1$. W szczególności, przyjmując $g := \min\{1, \frac{a-x^n}{M}\}$, otrzymalibyśmy $(x+g)^n \leq x^n + \frac{a-x^n}{M}M = a$, co stoi w sprzeczności z (2.8).

Wykazaliśmy zatem, że liczba $x = \sup Z$ spełnia równanie $x^n = a$. Jednoznaczność rozwiązania w zbiorze liczb nieujemnych wynika bezpośrednio z monotoniczności operacji potęgowania (o wykładniku naturalnym). \square

Nieco mniej znaną własność pierwiastka przywołujemy za [2].

Stwierdzenie 2.2.3. (i) Dla $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geq 0$, zachodzi nierówność

$$|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}| \leq \sqrt[n]{|a - b|}.$$

(ii) Jeśli $a > 1$, to $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$.

Dowód. Oznaczmy $c = \sqrt[n]{a}$ i $d = \sqrt[n]{b}$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć $a \leq b$, czyli $c \leq d$. Ze wzoru dwumianowego Newtona (tw. 1.2.3) mamy zatem

$$c^n = ((c-d) + d)^n \geq (c-d)^n + d^n.$$

Stąd $a - b = c^n - d^n \geq (c-d)^n = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})^n$, co kończy dowód (i).

Dla dowodu drugiej z nierówności połóżmy $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, co prowadzi do nierówności $a = (1 + a_n)^n \geq 1 + n \cdot a_n$. Stąd $a_n \leq \frac{a-1}{n}$. \square

Konstrukcja pierwiastka $\sqrt[n]{a}$ stanowi podstawę dla definicji *funkcji wykładniczej* a^x – w pierwszej kolejności dla wykładnika x będącego liczbą wymierną.

Definicja 2.2.2. Potęgą ułamkową liczby dodatniej $a \in \mathbb{R}$ o wykładniku wymiernym $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, nazywamy liczbę

$$a^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & \text{dla } m > 0, \\ 1 & \text{dla } m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^{|m|}}} & \text{dla } m < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ćwiczenie 2.2.1. Sprawdzić poprawność definicji – dla $a > 0$ i dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi równość $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, przy czym wielkość ta zależy tylko od wartości liczby wymiernej $\frac{m}{n}$.

Z elementarnych własności potęg o wykładniku całkowitym wynika

Wniosek 2.2.4. (i) Potęga ułamkowa jest funkcją monotoniczną, tzn.

$$\begin{aligned} a^p &< a^q & \text{dla } a > 1 \text{ i wymiernych } p < q, \text{ oraz} \\ a^p &< b^p & \text{dla } 0 < a < b \text{ i liczby dodatniej } p \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

(ii) Dla $a, b > 0$ i dowolnych liczb wymiernych $p, q \in \mathbb{Q}$ zachodzą równości

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q, \quad (ab)^p = a^p \cdot b^p \quad \text{ i } \quad (a^p)^q = a^{pq},$$

przy czym $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Dowód. Ćwiczenie. □

2.3 Potęga o wykładniku rzeczywistym

Definicja 2.3.1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$, potęgą liczby a o wykładniku rzeczywistym $x \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^q \in \mathbb{R}; q \in \mathbb{Q} \text{ i } q \leq x\} & \text{gdy } a \geq 1 \\ (a^{-1})^{-x} & \text{gdy } a < 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Korzystając z monotoniczności (Wniosek 2.2.4(i)) łatwo sprawdzić, że wzór (2.11) rozszerza definicję potęgi a^q dla q wymiernych, a własność monotoniczności możemy natychmiast uogólnić na przypadek dowolnych wykładników.

Stwierdzenie 2.3.1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y , niech $a, b \in \mathbb{R}$ oznaczają dowolne liczby dodatnie. Jeśli $x < y$, to

$$a^x < a^y \quad \text{dla } a > 1, \quad \text{natomiast } a^x > a^y \quad \text{dla } 0 < a < 1. \quad (2.12)$$

Jeśli $a < b$, to

$$a^x < b^x \quad \text{dla } x > 0, \quad \text{natomiast } a^x > b^x \quad \text{dla } x < 0. \quad (2.13)$$

Poza wypisaną listą znalazły się oczywiste przypadki $1^x = a^0 = 1$.

Dowód. Dla liczb $x < y$ wybierzmy dowolną liczbę wymierną $q \in (x, y)$ i załóżmy, że podstawa a spełnia nierówność $a > 1$. Bezpośrednio z definicji potęgi a^y wynika nierówność $a^q \leq a^y$. Z drugiej strony, jeśli $p \leq x$ jest liczbą wymierną, to nierówność $p < q$ implikuje $a^p < a^q$. Oznacza to, że liczba a^q jest ograniczeniem górnym zbioru $\{a^p; p \leq x\}$, a zatem $a^x \leq a^q$. Aby uzyskać stąd ostrą nierówność pomiędzy a^x i a^y , wystarczy w przedziale (x, y) wybrać dwie liczby wymierne $q_1 < q_2$. Wówczas

$$a^x \leq a^{q_1} < a^{q_2} \leq a^y.$$

Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że dla $a \in (0, 1)$ – zgodnie z (2.11) – udowodniona wyżej własność potęg o podstawie $b = a^{-1} > 1$ implikuje nierówność $a^x > a^y$ i kończy dowód (2.12).

Przystępując do dowodu nierówności (2.13), zauważmy, że z udowodnionej już części twierdzenia wynikają nierówności

$$a^x < a^0 = 1^x \quad \text{dla } a < 1, \quad \text{oraz} \quad 1^x = b^0 < b^x \quad \text{dla } 1 < b,$$

w przypadku $x > 0$, oraz analogiczne, przeciwne nierówności dla $x < 0$. Potwierdza to nierówności: $a^x < b^x$ – dla $x > 0$, oraz $a^x > b^x$ – dla $x < 0$, w ogólniejszej sytuacji, gdy $a \leq 1 < b$ lub $a < 1 \leq b$,

Rozważmy teraz przypadek $1 < a < b$, czyli $\frac{b}{a} > 1$. Dla $x > 0$ ustalamy dodatnią liczbę wymierną $p < x$. Korzystając z faktu, iż dla dowolnego wymiernego $q < x$ mamy $b^q \leq b^x$, wykażemy nierówność

$$a^q \leq \frac{1}{(b/a)^p} b^x. \quad (2.14)$$

Istotnie, z Wniosku 2.2.4(ii) wynikają równości $\frac{b^q}{a^q} = \left(\frac{b}{a}\right)^q$ i $a^q = \frac{1}{(b/a)^q} b^q$. Jeśli $q \leq p$, to $a^q \leq a^p \leq \frac{1}{(b/a)^p} b^x$. Dla $p < q \leq x$ nierówność (2.14) wynika z oszacowania $(b/a)^q > (b/a)^p$. Udowodniona nierówność zawiera ograniczenie górne dla zbioru $\{a^q; q \leq x\}$, a zatem

$$a^x \leq \frac{1}{(b/a)^p} b^x < b^x,$$

skoro wyrażenie w mianowniku jest większe niż 1. Dla $x < 0$ i dowolnego wymiernego $q < x$, mamy oszacowanie

$$b^q = \left(\frac{b}{a}\right)^q a^q \leq \left(\frac{b}{a}\right)^x a^x,$$

a więc $b^x \leq \left(\frac{b}{a}\right)^x a^x < a^x$.

Przypadek $0 < a < b < 1$ jest równoważny z $1 < b^{-1} < a^{-1}$ i pozostaje do sprawdzenia dla czytelnika. \square

Uważny czytelnik zauważył zapewne, że nie korzystaliśmy do tej pory z „oczywistej” zależności pomiędzy a^x i a^{-x} . Wbrew swej oczywistości, równość $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ pojawi się dopiero wraz z podstawowymi algebraicznymi własnościami potęgi o wykładniku rzeczywistym – analogicznymi do sformułowanych we Wniosku 2.2.4(ii). Stosowne twierdzenie wykazujemy w jednym z kolejnych podrozdziałów, wraz z lematem (czyli pomocniczym twierdzeniem) umożliwiającym efektywne wyznaczanie wartości potęgi jako *granice ciągów*. Jako wstępny wynik pozwalający na przybliżanie wielkości a^x prezentujemy w tym miejscu oczywisty

Wniosek 2.3.2. *Dla $a \geq 1$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej x i liczb wymiernych $p, p' \in \mathbb{Q}$ takich, że $p \leq x \leq p'$, zachodzi nierówność*

$$a^p \leq a^x \leq a^{p'}.$$

□

Ze Stwierdzenia 2.3.1 wynika także oszacowanie wartości potęgi a^x w zależności od podstawy $a \approx 1$.

Wniosek 2.3.3. *Jeśli liczby dodatnie $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ spełniają, dla pewnej liczby całkowitej m , nierówności $x \leq m$, $\varepsilon < \frac{1}{m}$, oraz*

$$1 - \varepsilon < a < \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

to wówczas

$$1 - m\varepsilon < a^x < \frac{1}{1 - m\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Dowód. Monotoniczność zawarta we wzorach (2.12)–(2.13) prowadzi do nierówności

$$(1 - \varepsilon)^m \leq (1 - \varepsilon)^x < a^x < \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)^x \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)^m.$$

Z Wniosku 1.2.4 wynikają nierówności $(1 - \varepsilon)^m \geq 1 - m\varepsilon$. Stąd – teza. □

Rozdział 3

Ciągiem do granicy

Zaprezentowany w poprzednim podrozdziale sposób wykorzystania pojęć kresu górnego i dolnego pozwala szybko stwierdzić istnienie badanych, interesujących nas wielkości. Nie prowadzi to jednak na ogół do prostych, efektywnych metod ich wyznaczania. Jeśli np. za przybliżenie liczby $x = 2\sqrt{2}$ z dokładnością do $\varepsilon = 0,00001$ uznamy dowolną liczbę y – „znaną”, którą potrafimy wyliczyć i taką, że $|x - y| \leq \varepsilon$, to od efektywnego *schematu obliczeniowego* możemy wymagać, by w kolejnych $n \in \mathbb{N}$ krokach, dla dopuszczalnego błędu $\varepsilon_n > 0$, prowadził do „wyliczalnej” wielkości y_n – coraz bliższej szukanej liczbie x . Wprowadzona tu numeracja kroków ma związek z Twierdzeniem 1.3.1 i korzysta z możliwości przybliżania zarówno dowolnie dużych jak i dowolnie małych liczb za pomocą wielkości pochodzących od liczb naturalnych.

3.1 Ciągi liczbowe

Definicja 3.1.1. Ciągiem liczbowym $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywać będziemy dowolną funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych i przypisującą każdej liczbie naturalnej n liczbę $a_n \in \mathbb{R}$, zwaną także n -tym wyrazem ciągu lub wyrazem o indeksie n .

Uwaga 3.1.1. Pojęcie funkcji jest wprowadzane w ramach kursu z *Podstaw Logiki i Teorii Mnogości*. Precyzujemy w tym miejscu, że sposób, w jaki wielkość $a(n) = a_n$ odpowiada indeksowi $n \in \mathbb{N}$, kodowany jest w postaci uporządkowanej pary (n, a_n) , a sama funkcja a jest formalnie zbiorem

wszystkich takich par – po jednej dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wyrazy ciągu mogą być podane jawnym wzorem, np. $a_n = \frac{(-1)^n}{\cos(n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$, lub opisane w sposób niejawny, z wykorzystaniem zasady indukcji. Względnie praktyczne sprawiają, że wygodnie jest czasem rozpocząć indeksowanie wyrazów ciągu zaczynając od $n = 0$ lub $n > 1$.

Przykład 3.1.1. Formuła

$$F_n = n \quad \text{dla } n \in \{0, 1\}, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2 \quad (3.1)$$

definiuje klasyczny ciąg *Fibonacciego* $(F_n)_{n \geq 0}$ o wyrazach $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$

Korzystając z indukcji (ćwiczenie!) możemy udowodnić wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad \text{dla } n \geq 0. \quad (3.2)$$

Ponieważ $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| = 0,618\dots$, drugi składnik (podzielony przez $\sqrt{5}$) jest co do wartości bezwzględnej mniejszy niż 0,5. Wynika stąd, że F_n jest liczbą całkowitą najbliższą pierwszemu ze składników wzoru (3.2), czyli jest częścią całkowitą

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \right\rfloor \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

liczby o $\frac{1}{2}$ większej.

Ćwiczenie 3.1.1. Z pomocą np. Maximy lub Maple wyznaczyć liczby rzeczywiste $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ dla $n \leq 20$ – z dokładnością do 15 cyfr po przecinku.

Ciąg liczbowy a wyznacza swój zbiór wartości $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, przy czym, uogólniając pojęcia kresu górnego i dolnego, przyjmujemy

Definicja 3.1.2. Ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy ograniczonym z góry lub z dołu, jeśli wskazaną własność ograniczoności ma zbiór wartości ciągu. Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych, wielkości

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{ i } \quad \inf_n a_n := \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

nazywamy odpowiednio kresem górnym i kresem dolnym rozważanego ciągu.

Zgodnie z wcześniejszymi definicjami – dla zbiorów – mamy

Wniosek 3.1.1. Dla dowolnego ograniczonego ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w \mathbb{R}

(i) Liczba M ograniczająca ciąg z góry, a więc taka, że $M \geq a_n$, dla $n \in \mathbb{N}$, jest kresem górnym ciągu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że $a_k > M - \varepsilon$.

(ii) Liczba m ograniczająca ciąg z dołu, a więc taka, że $m \leq a_n$, dla $n \in \mathbb{N}$, jest kresem dolnym ciągu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że $a_k < m + \varepsilon$. \square

Przypominamy, że istnienie opisanych wyżej kresów – dla ciągów ograniczonych – wynika z aksjomatu ciągłości, natomiast zapis $\sup_n a_n = \infty$, lub $\inf_n a_n = -\infty$, oznacza brak ograniczoności.

Ćwiczenie 3.1.2. Wyznaczyć kresy ciągów $(\frac{n-1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ i $((-1)^n \frac{n-1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Definicja 3.1.3. Ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy monotonicznym, jeśli jest niemalejący, tzn.

$$a_n \leq a_m \quad \text{dla } n \leq m,$$

lub nierosnący, tzn.

$$a_n \geq a_m \quad \text{dla } n \leq m.$$

Od ciągu ściśle monotonicznego wymaga się, by był rosnący lub malejący, co znaczą nierówności ostre w podanych wyżej warunkach.

Z zasady indukcji wynika natychmiast

Stwierdzenie 3.1.2. Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) a jest ciągiem niemalejącym $\iff a_n \leq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz

(ii) a jest ciągiem nierosnącym $\iff a_n \geq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. \square

Przykład 3.1.2. (i) Ciąg rosnący $a_n = \sum_{i \leq n} \frac{1}{i^2}$ jest ograniczony. Istotnie, dla $i > 1$ zachodzi nierówność $\frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{(i-1)i} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$. Stąd oszacowanie

$$a_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ciąg rosnący $a_n = \sum_{i \leq n} \frac{1}{i}$ jest nieograniczony, gdyż dla każdego n postaci $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, prawdziwe jest oszacowanie

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

W przypadku zbiorów nieograniczonych elementarna obserwacja zanotowana w Ćwiczeniu 2.1.1 w naturalny sposób wiąże się z monotonicznością ciągów.

Wniosek 3.1.3. *Niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest nieograniczony z góry wtedy i tylko wtedy, gdy w A istnieje rosnący ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $a_n > n$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Zbiór A jest nieograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wyrazy malejącego ciągu liczbowego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o własności $a_n < -n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. W każdym nieograniczonym z góry zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ istnieją liczby większe niż 1. Wybierając jedną z nich jako a_1 , możemy dalszą konstrukcję oprzeć na zasadzie indukcji. Jeśli zatem ustalone są już wyrazy $a_k \in A$ dla $k \leq n$, takie że $a_k > k$ dla wszystkich k i $a_k < a_{k+1}$ dla $k < n$, w kolejnym kroku korzystamy z nieograniczoności zbioru i wybieramy $a_{n+1} \in A$ jako dowolny element spełniający nierówność $a_{n+1} > \max\{n, a_n\}$.

Dla zbioru nieograniczonego z dołu konstrukcja ciągu przebiega analogicznie. \square

3.2 Granica ciągu

Definicja 3.2.1. *Własność $W(x)$ opisana przez dowolną funkcję zdaniową określoną dla liczb $x \in \mathbb{R}$ przysługuje prawie wszystkim wyrazom ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jeśli istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $W(a_n) = \text{PRAWDA}$, dla wszystkich wyrazów ciągu o indeksach $n \geq k$, czyli – dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

W zależności od kontekstu, mówimy także, że *prawie wszystkie* wyrazy ciągu mają własność $W(x)$ lub – spełniają warunek $W(x)$.

Definicja 3.2.2. *Ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, jeśli istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$, którą nazywamy granicą ciągu, taka że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu mieszczą się w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.*

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy rozbieżnym, jeśli nie jest zbieżny.

Granice ciągu zbieżnego (a_n) oznaczamy symbolem $\lim_n a_n$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zgodnie z definicją równość $g = \lim_n a_n$, czyli zbieżność ciągu do liczby g , oznacza

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} |a_n - g| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n \geq k. \quad (3.3)$$

Dla ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do granicy g powszechnie przyjęty jest także zapis

$$a_n \longrightarrow g, \quad \text{gdy } n \longrightarrow \infty,$$

co odczytujemy: *a_n dąży do liczby g , gdy n dąży do nieskończoności.* Podkreślamy, że to wyrazy ciągu (a nie sam ciąg) dążą do wartości granicznej.

Przykład 3.2.1. $\lim_n \frac{1}{n} = \lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Ciąg $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

Uwaga 3.2.1. Ciągi zbieżne i ich granice bywają – nawet w tekstach matematycznych – definiowane w sposób niejawni lub domyślny. Jak rozumieć np. każdy z zapisów

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (3.4)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \quad ? \quad (3.5)$$

W istocie, wzór *Leibniza* (3.4) i wzór *Wallisa* (3.5) oznaczają zbieżność ciągów o wyrazach będących skończonymi sumami, bądź iloczynami

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \longrightarrow \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Nieco większy problem przysparza precyzyjny opis równości

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3.6)$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (3.7)$$

gdzie liczba stojąca po prawej stronie, nazywana *złotą proporcją*, pojawiła się już przy ciągu Fibonacciego $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (por. (3.2)) i jest dodatnim pierwiastkiem równania $x^2 - x - 1 = 0$. Pierwsza z równości dotyczy zbieżności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, natomiast druga – ciągu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $b_1 = 1$ i $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, a zatem (udowodnić!)

$$b_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 3.2.1. Wyznaczyć (np. z pomocą Maximy lub Maple) przybliżone wartości pierwszych 100 wyrazów każdego z ciągów (3.4)–(3.7) i porównać je na osi liczbowej (na wykresie) z podaną wyżej wartością graniczną. W każdym przypadku wyznaczyć najmniejszy błąd uzyskanego ciągu przybliżeń.

Bezpośrednio z definicji wynika dość oczywiste

Stwierdzenie 3.2.1. *Następujące własności ciągów są równoważne:*

- (i) $\lim_n a_n = g$,
- (ii) $\lim_n (a_n - g) = 0$,
- (iii) $\lim_n |a_n - g| = 0$.

□

Istnienie granicy ciągu nie zależy od początkowych wyrazów ciągu, a usunięcie lub dołączenie skończonej, dowolnie dużej liczby wyrazów ciągu (i związana z tym zmiana numeracji) ani nie zmienia granicy ciągu zbieżnego, ani nie może zmienić ciągu rozbieżnego na zbieżny. Własność ta zapisana precyzyjnie przyjmuje postać

Stwierdzenie 3.2.2. *Dla dowolnej liczby naturalnej m zbieżność ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest równoważna zbieżności ciągu $(a_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$. Jeśli dowolny z rozważanych ciągów jest zbieżny, to wszystkie mają tę samą granicę*

$$\lim_n a_{m+n} = \lim_n a_n. \quad (3.8)$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Zauważmy, że ograniczoność jest podstawowym warunkiem koniecznym zbieżności ciągów.

Twierdzenie 3.2.3. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.*

Dowód. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby g , to, biorąc $\varepsilon = 1$, stwierdzamy istnienie liczby $k \in \mathbb{N}$ takiej, że $g - 1 < a_n < g + 1$ dla $n \geq k$. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są zatem nierówności $m \leq a_n \leq M$, gdzie

$$m = \min\{a_1, \dots, a_{k-1}, g - 1\} \quad \text{ i } \quad M = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, g + 1\},$$

co oznacza ograniczoność ciągu. Przypuszczenie, że nierówności (3.3) zachodzą dla liczby g oraz dla $g' \neq g$, prowadzi do sprzeczności. Jeśli bowiem przyjmiemy $\varepsilon = \frac{|g-g'|}{2} > 0$, to dla prawie wszystkich n powinny zachodzić obie nierówności: $|a_n - g| < \varepsilon$ i $|a_n - g'| < \varepsilon$, a to implikowałoby sprzeczną z definicją ε nierówność

$$|g - g'| \leq |g - a_n| + |a_n - g'| < 2\varepsilon. \quad \square$$

W przypadku ciągów ograniczonych warunkiem dostatecznym zbieżności jest monotoniczność.

Twierdzenie 3.2.4. *Ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony. Dla ciągu (a_n) niemalejącego $\lim_n a_n = \sup_n a_n$, natomiast dla ciągu nierosnącego $\lim_n a_n = \inf_n a_n$.*

Dowód. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym niemalejącym, ograniczonym ciągiem liczbowym. Oznaczmy przez $g = \sup_n a_n < \infty$ kres górny ciągu. Z Wniośku 3.1.1(i) wiemy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $g - \varepsilon < a_k$, a ponieważ ciąg jest niemalejący,

$$g - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq g \quad \text{dla wszystkich } n \geq k.$$

Zgodnie z definicją granicy, oznacza to zbieżność ciągu i równość $\lim_n a_n = g$. Dowód zbieżności ograniczonego ciągu nierosnącego przebiega analogicznie. \square

Ćwiczenie 3.2.2. W przypadku, gdy kres górny M zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}$ nie należy do A , skonstruować w A ciąg *rosnący* zbieżny do M . Analogicznie, jeśli liczba $m = \inf A$ nie należy do zbioru A , wykazać, że m jest granicą zawartego w A ciągu *malejącego*.

3.3 Ważne przykłady

Przykład 3.3.1. Ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, w którym $x_1 = 2$, a dla wszystkich n zachodzi równość

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (3.9)$$

jest poprawnie zdefiniowany na mocy zasady indukcji. Istotnie, ze wzoru (3.9) wynika, że dla każdego n , jeśli $x_n > 0$, to także $x_{n+1} > 0$, przy czym w mianowniku nie występuje nigdy liczba 0. Tożsamość

$$x_{n+1}^2 = \frac{x_n^2}{4} + 1 + \frac{1}{x_n^2} = 2 + \left(\frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n}\right)^2 \geq 2$$

dowodzi, że ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez liczbę $\sqrt{2}$. Kolejna tożsamość

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} < 0$$

dowodzi, że rozważany ciąg jest malejący. Wynika stąd zbieżność ciągu, przy czym granica $x_0 = \lim_n x_n$, ma własność $x_0^2 \geq 2$. Z Twierdzeń 3.4.1–3.4.5 poniżej wynika, że zachodzi równość $x_0 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0}$, a więc $x_0 = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 3.3.1. Korzystając z zależności $x_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2,$$

wykazać za pomocą indukcji nierówność

$$0 < x_n - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2^{2^n-1}} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wynioskować stąd, że $|x_5 - \sqrt{2}| < 0,000000001$. Wyznaczyć liczbę x_5 .

Klasycznym przykładem ciągu monotonicznego jest ciąg potęg $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla $a > 0$.

Stwierdzenie 3.3.1 (Ciąg geometryczny). *Dla $a \in (-1, 1]$ istnieje granica*

$$\lim_n a^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \in (-1, 1), \\ 1 & \text{dla } a = 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

W pozostałych przypadkach ciąg potęg liczby a jest rozbieżny. Ponadto, dla $|a| < 1$ ciąg sum $(\sum_{i=0}^n a^i)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i

$$\lim_n \sum_{i=0}^n a^i = \frac{1}{1-a}. \quad (3.11)$$

Dowód. Pomijając oczywiste przypadki $a = 0, 1$, możemy dla $a \in (0, 1)$ rozważyć liczbę $b = \frac{1}{a} - 1 > 0$. Zgodnie z Wnioskiem 1.2.4 mamy $(1+b)^n \geq 1+nb$, a zatem

$$a^{-n} \geq 1 + nb > n \frac{1-a}{a}.$$

Wynikająca stąd nierówność $a^n < \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{n}$ implikuje zbieżność badanego ciągu do 0. Przy okazji otrzymaliśmy także nieograniczoność ciągu $(\frac{1}{a^n})_{n \in \mathbb{N}}$, co oznacza rozbieżność ciągu potęgowego o podstawie większej niż 1. Przypadek liczb $a \in (-1, 0)$ i ogólniej $a < 0$ jest teraz wnioskiem ze Stwierdzenia 3.2.1.

Równość (3.11) wynika z tożsamości

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

a zatem $\lim_n \left| \sum_{i=0}^n a^i - \frac{1}{1-a} \right| = \lim_n \frac{1}{1-a} |a|^{n+1} = 0$. □

Kolejny przykład jest na tyle istotny, że sformułujemy go jako

Twierdzenie 3.3.2. *Ciąg o wyrazie ogólnym*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

jest rosnący i zbieżny do granicy $e \in [2, 3]$.

Definicja 3.3.1. Liczbę $e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$ nazywamy liczbą Eulera.

Symbol e jest oznaczeniem liczby Eulera powszechnie przyjętym w niemal całej matematyce. Dopuszczalnym, alternatywnym oznaczeniem jest E .

Dowód Twierdzenia 3.3.2. Dla dowodu monotoniczności ciągu (e_n) korzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona (Twierdzenie 1.2.3) i, przekształcając wyraz ogólny, otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{n}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Oznaczając przez $b_{n,k}$ poszczególne składniki powyższej sumy, dla $2 \leq k \leq n$, porównujemy

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \\ &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!} = b_{n+1,k} \end{aligned}$$

dla $k \leq n$. Zatem $e_{n+1} - e_n = \sum_{k=2}^n (b_{n+1,k} - b_{n,k}) + b_{n+1,n+1} > 0$, co dowodzi, że badany ciąg jest rosnący.

Z uzyskanej wyżej postaci (3.12) wynika oszacowanie $e_n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$, a zatem pozostaje wykazać ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym

$$s_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}. \quad (3.13)$$

W tym celu porównujemy poszczególne mianowniki z potęgami liczby 2,

$$\begin{aligned} s_n &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2} = 3 - \frac{1}{2^n}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

co potwierdza zbieżność badanego ciągu i kończy dowód. \square

Przy okazji wykazaliśmy także zbieżność ciągu (s_n) . W dalszej części bieżącego podrozdziału udowodnimy, że i w tym przypadku granicą jest liczba Eulera e .

3.4 Własności granic

Twierdzenie 3.4.1 (Elementarne własności granic). *Jeśli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, to*

$$(i) \lim_n (c \cdot a_n + b) = c \cdot \lim_n a_n + b, \text{ dla } b, c \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \lim_n |a_n| = |\lim_n a_n|, \text{ oraz}$$

(iii) $\lim_n \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_n a_n}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$, jeśli wyrazy ciągu są nieujemne.

Jeśli $\lim_n a_n \neq 0$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są niezerowe, to

$$(iv) \lim_n \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_n a_n}.$$

W szczególności, każdy z podanych wyżej ciągów jest zbieżny.

Dowód. Własności (i)–(ii) wynikają bezpośrednio z zależności

$$|c \cdot a_n - c \cdot g| = |c| \cdot |a_n - g| \quad \text{ i } \quad ||a_n| - |g|| \leq |a_n - g|,$$

gdzie $g = \lim_n a_n$, co pozostawiamy do sprawdzenia czytelnikowi.

Własność (iii) jest prostym wnioskiem ze Stwierdzenia 2.2.3. Istotnie, jeśli dla wszystkich $n \geq k$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon^m$, gdzie $g \geq 0$, to wówczas

$$|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{g}| \leq \sqrt[m]{|a_n - g|} < \varepsilon.$$

Zgodnie z (ii) oraz z założeniem przyjętym w (iv) liczba $|g| > 0$ jest granicą ciągu wartości bezwzględnych $(|a_n|)$. Dla dowodu (iii) wykażemy w pierwszej kolejności, że ciąg $(|a_n|)$ jest ograniczony z dołu przez liczbę dodatnią. Istotnie, jeśli przyjąć $\varepsilon = \frac{|g|}{2}$, to ze zbieżności ciągu wynika, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ przedział $(|g| - \varepsilon, |g| + \varepsilon)$ zawiera wszystkie liczby $|a_n|$ o indeksach $n \geq k$. Zatem $|a_n| > \frac{|g|}{2}$ dla $n \geq k$ i, ogólnie,

$$|a_n| \geq m := \min(|a_1|, \dots, |a_{k-1}|, \frac{|g|}{2}) > 0 \quad \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zbieżność ciągu odwrotności do liczby $\frac{1}{g}$ wynika teraz z oszacowania

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{g - a_n}{a_n \cdot g} \right| \leq \frac{1}{m \cdot |g|} |a_n - g|.$$

□

Porównywanie wyrazów ciągów jest klasyczną metodą obliczeniową ułatwiającą rozstrzygnięcie, czy badany ciąg jest zbieżny i ewentualne wyznaczanie granic. Bezpośrednio z definicji wyprowadzamy kolejną elementarną własność oraz klasyczne, podstawowe twierdzenie o takim właśnie przeznaczeniu.

Stwierdzenie 3.4.2 (Monotoniczność granic). *Jeśli wyrazy ciągów zbieżnych $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają nierówność $a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich n , to także*

$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n.$$

W szczególności, jeśli wyrazy ciągu b są nieujemne, to $\lim_n b_n \geq 0$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Twierdzenie 3.4.3 (O trzech ciągach). *Niech $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ i $c = (c_n)$ będą ciągami rzeczywistymi o wyrazach spełniających nierówności*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli ciągi a i c są zbieżne i mają wspólną granicę $g = \lim_n a_n = \lim_n c_n$, to ciąg b jest także zbieżny i ma tę samą granicę $\lim_n b_n = g$.

Dowód. Zgodnie z Definicją 3.2.2 zbieżność ciągów a i c do tej samej granicy g oznacza, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją liczby $k_a, k_c \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon) \quad \text{dla } n \geq k_a \quad \text{i} \quad c_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon) \quad \text{dla } n \geq k_c.$$

Jeśli zatem $n \geq k := \max\{k_a, k_c\}$, to prawdziwe są nierówności

$$g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon,$$

co oznacza zbieżność $\lim_n b_n = g$. □

Stąd ważny, szczególny przypadek jako

Wniosek 3.4.4. *Ciąg (a_n) jest zbieżny (do liczby 0), jeśli istnieje zbieżny do zera ciąg (b_n) taki, że dla pewnego $M > 0$ i prawie wszystkich n zachodzi nierówność*

$$|a_n| \leq M \cdot b_n. \quad \square$$

Przykład 3.4.1. Nierówność $\left| \frac{\sin(n)}{n + \cos(n^2)} \right| \leq \frac{1}{n-1}$, dla $n \geq 2$, implikuje zbieżność badanego ciągu do 0.

Twierdzenie 3.4.5 (Algebraiczne własności granic). *Niech (a_n) i (b_n) będą dowolnymi ciągami zbieżnymi. Wówczas*

$$(i) \lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n, \text{ oraz}$$

$$(ii) \lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n.$$

Jeśli $\lim_n b_n \neq 0$ i wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są niezerowe, to także

$$(iii) \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}.$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia $g = \lim_n a_n$, $h = \lim_n b_n$. Dla dowodu addytywności granicy, czyli własności (i), skorzystamy bezpośrednio z definicji granicy i stwierdzamy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy obu ciągów spełniają nierówności $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2}$. Istnieje zatem liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$|(a_n + b_n) - (g + h)| \leq |a_n - g| + |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a to oznacza zbieżność ciągu sum i równość granic w (i).

Dowód własności (ii) korzysta z tożsamości $a_n b_n - g \cdot h = (a_n - g)b_n + g(b_n - h)$. Wynikające stąd nierówności

$$0 \leq |a_n b_n - g \cdot h| \leq |a_n - g| \sup_n |b_n| + |g| |b_n - h|$$

pozwalają skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, przy czym zbieżność do 0 ciągu o wyrazie ogólnym postaci $|a_n - g|M + |g||b_n - h|$ wynika kolejno ze Stwierdzenia 3.2.1(iii), Twierdzenia 3.4.1(i) i wykazanej wyżej addytywności granicy.

Ostatnia własność, dotycząca ciągu utworzonego z ilorazów $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ wynika wprost z Twierdzenia 3.4.1(iii) i wykazanej wyżej własności (ii). \square

3.5 Ważne przykłady – cd.

Przykład 3.5.1. Korzystając ze zbieżności ciągu $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiującego liczbę Eulera e , wyznaczymy granice

$$(i) \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \text{ oraz}$$

$$(ii) \lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

Ponieważ $1 - \frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n-1})^{-1}$, wyrazy pierwszego z ciągów spełniają zależność

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{n-1}{n} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \quad \text{dla } n > 1,$$

a zatem

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_n \frac{n-1}{n}}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}.$$

Stąd $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot e$.

Przykład 3.5.2. Jeśli wyraz ogólny $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ ciągu $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ilorazem wielomianów, gdzie

$$P(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad \text{i} \quad Q(x) = c_l x^l + c_{l-1} x^{l-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym $b_k \neq 0$ i $c_l \neq 0$, to w przypadku, gdy wielomiany są tego samego stopnia $k = l$, stwierdzamy, że

$$\lim_n a_n = \lim \frac{b_k + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^k}}{c_k + \frac{c_{k-1}}{n} + \dots + \frac{c_0}{n^k}} = \frac{b_k}{c_k}.$$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) , gdy wielomiany P i Q mają różne stopnie. Stopień wielomianu będziemy oznaczać symbolem \deg , a zatem $\deg P = k$, $\deg Q = l$.

Przykład 3.5.3. Zbieżność ciągu $(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})_{n \in \mathbb{N}}$ i jego granicę ustalimy, korzystając z przekształcenia

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} &= \frac{(n^2 + n) - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Zatem badany ciąg jest zbieżny i $\lim_n (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) = 1$.

Zgodnie z zapowiedzią wracamy do liczby Eulera.

Twierdzenie 3.5.1. Liczba Eulera e jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, tzn.

$$\lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3.15)$$

Dowód. Wiemy już, że $(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ – dla dowodu równości granic skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach, przy czym korzystać będziemy z oznaczeń przyjętych w dowodzie Twierdzenia 3.3.2. Zauważmy, że z oszacowania (1.4) i wzoru (1.5) wynikają nierówności

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{k-1}{n}\right) = 1 - \frac{(k-1)k}{2n}.$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{(k-1)k}{2n}\right) \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} > s_n - \frac{3}{2n}, \end{aligned}$$

czyli $s_n - \frac{3}{2n} < e_n \leq s_n$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. \square

Ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozwala przybliżać liczbę Eulera e z dużo większą dokładnością (jest *szybciej zbieżny*) niż ciąg $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wniosek 3.5.2. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n \cdot n!}. \quad (3.16)$$

Dowód. Dla ciągu $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takiego jak w Twierdzeniu 3.5.1 i dowolnych liczb naturalnych $m > n$ prawdziwa jest nierówność

$$s_m - s_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}} \right) < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}.$$

Ponieważ $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, otrzymujemy stąd $s_m \leq s_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ – dla $m > n$, a więc dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$. Pozostaje skorzystać z faktu, że $\lim_m s_m = e$. \square

Ćwiczenie 3.5.1. Wyliczyć s_{10} i porównać oszacowanie (3.16) z faktyczną wartością błędu uzyskanego przybliżenia liczby e . Dla jakiego n błąd przybliżenia jest mniejszy niż 10^{-15} ? Dla jakiego n błąd jest mniejszy niż 10^{-50} i przynajmniej 50 początkowych cyfr uzyskanego rozwinięcia dziesiętnego liczby e jest dokładne?

Kolejny przykład również wymaga precyzyjnego oszacowania.

Przykład 3.5.4. Przyjmując $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$, gdzie $a_n \geq 0$, otrzymujemy

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n + \binom{n}{2} a_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Stąd $a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ dla $n > 1$, a zatem

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1. \quad (3.17)$$

Z nierówności $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$ wynika oszacowanie $a_n \geq \frac{1}{n}$ dla $n \geq 3$, a zatem zbieżność ciągu $\sqrt[n]{n}$ do 1 jest raczej wolna.

Wniosek 3.5.3. Dla dowolnej liczby $a > 0$

$$\lim_n \sqrt[n]{a} = 1. \quad (3.18)$$

Dowód. Ćwiczenie. Rozważyć osobno przypadki $a > 1$ i $0 < a < 1$. \square

Rozdział 4

Między granicą dolną i górną

Wiemy już, że istnienie granicy wymaga, by badany ciąg był ograniczony. W przypadku ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych zastąpienie podanych w Twierdzeniu 2.1.3 warunków charakteryzujących kresy – przez słabsze, zachodzące dla prawie wszystkich wyrazów ciągu, prowadzi do ważnych w analizie pojęć *granicy górnej* i *dolnej* ciągu, których istnienie wynika bezpośrednio z przyjętego przez nas aksjomatu ciągłości i nie wymaga żadnych dodatkowych założeń.

Godząc się na nieskończone wartości przypisywane kresom górnym lub dolnym (wcześniej), czy granicom górnym lub dolnym (za chwilę), decydujemy się zarazem na to, by rozszerzyć zbiór liczb rzeczywistych o dwie *nieskończoności* $\pm\infty$ nie będące liczbami i przyjąć

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (4.1)$$

Ponieważ pojęcie liczby rzeczywistej nie podlega zmianie, elementy zbioru $\overline{\mathbb{R}}$ będziemy ogólnie nazywać *wielkościami*. Zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ rozważamy wraz z rozszerzoną (choć znaną wcześniej) relacją *porządku*

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} -\infty < x < \infty$$

i z częściowym rozszerzeniem *odawania* wykluczającym operację $-\infty + \infty$. Rozszerzając działanie *mnożenia*, wykluczamy operację $0 \cdot \pm\infty$ ze względu na jej nieokreślony (zależny od kontekstu) wynik.

4.1 Granice: dolna i górna

Niech $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Przyjmijmy oznaczenia

$$\mathcal{S}(a) = \{M \in \mathbb{R}; a_n \leq M \text{ dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}\} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{I}(a) = \{m \in \mathbb{R}; m \leq a_n \text{ dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}\}. \quad (4.3)$$

Definicja 4.1.1. Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) granicą górną nazywamy kres dolny liczb ograniczających z góry prawie wszystkie wyrazy ciągu, czyli wielkość

$$\limsup_n a_n := \begin{cases} \inf \mathcal{S}(a) \in \overline{\mathbb{R}}, & \text{jeśli } \mathcal{S}(a) \neq \emptyset \\ \infty & \text{gdy } \mathcal{S}(a) = \emptyset, \end{cases} \quad (4.4)$$

(ii) granicą dolną nazywamy kres górny liczb ograniczających z dołu prawie wszystkie wyrazy ciągu, czyli wielkość

$$\liminf_n a_n := \begin{cases} \sup \mathcal{I}(a) \in \overline{\mathbb{R}}, & \text{jeśli } \mathcal{I}(a) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{gdy } \mathcal{I}(a) = \emptyset. \end{cases} \quad (4.5)$$

Zbiory $\mathcal{S}(a)$ i $\mathcal{I}(a)$ będziemy nazywać *zbiorem ograniczeń górnych* i, odpowiednio, *zbiorem ograniczeń dolnych* (prawie wszystkich) wyrazów ciągu a . Dodatkowym uzasadnieniem dla wprowadzonych pojęć jest pomocnicze twierdzenie charakteryzujące liczby będące ograniczeniami prawie wszystkich wyrazów ciągu.

Lemat 4.1.1. (i) Zbiór $\mathcal{S}(a)$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg a jest ograniczony z góry. Jeśli $\mathcal{S}(a) \neq \emptyset$, wówczas zbiór $\mathcal{S}(a)$ zawiera wszystkie liczby rzeczywiste i jest równy \mathbb{R} , albo jest przedziałem nieograniczonym o początku $\limsup_n a_n$.

(ii) Zbiór $\mathcal{I}(a)$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg a jest ograniczony z dołu. Jeśli $\mathcal{I}(a) \neq \emptyset$, to $\mathcal{I}(a) = \mathbb{R}$, albo $\mathcal{I}(a)$ jest przedziałem nieograniczonym o końcu $\liminf_n a_n$.

Dowód. Jeśli zbiór $\mathcal{S}(a)$ jest niepusty i zawiera liczbę M , a więc istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że $a_n \leq M$ dla wszystkich $n \geq k$, to zachodzi nierówność

$$a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, M\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a to oznacza, że badany ciąg jest ograniczony z góry. Z kolei, dla ciągu ograniczonego z góry, zbiór $\mathcal{S}(a)$ jest niepusty, gdyż zawiera liczbę $\sup_n a_n$. Pozostaje zauważyć, że z (4.2) wynika następująca własność

$$M \in \mathcal{S}(a) \text{ i } M < M' \implies M' \in \mathcal{S}(a),$$

dzięki czemu postać zbioru $\mathcal{S}(a)$ opisuje aksjomat ciągłości. Analogiczna własność

$$m \notin \mathcal{I}(a) \text{ i } m < m' \implies m' \notin \mathcal{I}(a),$$

dowodzi, że dopełnienie $\mathbb{R} \setminus \mathcal{I}(a)$ jest przedziałem $[m_a, \infty)$ lub (m_a, ∞) , lub jednym ze zbiorów \emptyset, \mathbb{R} . Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że własność $\mathcal{I}(a) \neq \emptyset$ oznacza – jak w pierwszej części dowodu – istnienie stosownego ograniczenia ciągu a (z dołu). \square

Przykład 4.1.1. Wyznaczyć granice górne i dolne dla każdego z ciągów $a = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b = (n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c = ((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$, $d = (n + (-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Czytelność podanej wyżej definicji wymaga, by wskazać układ własności charakteryzujący wprowadzone pojęcia. Wstępna charakteryzacja wynika bezpośrednio z Lematu 4.1.1.

Wniosek 4.1.2. Dla dowolnych liczb $m, M \in \mathbb{R}$ prawdziwe są implikacje

$$\begin{aligned} \limsup_n a_n < M &\implies \exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq k} a_n < M & i \\ &\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq k} a_n \leq M \implies \limsup_n a_n \leq M, & \text{czyli} \\ \limsup_n a_n > M &\implies \forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq k} a_n > M, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} m < \liminf_n a_n &\implies \exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq k} m < a_n & i \\ &\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq k} m \leq a_n \implies m \leq \liminf_n a_n, & \text{czyli} \\ m > \liminf_n a_n &\implies \forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq k} m > a_n. \end{aligned}$$

\square

Skończone wartości granic górnych lub dolnych charakteryzuje

Twierdzenie 4.1.3. Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- (i) $\limsup_n a_n = M \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ przedział $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) , natomiast tylko skończona liczba wyrazów ciągu ma własność $a_n \geq M + \varepsilon$;
- (ii) $\liminf_n a_n = m \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ przedział $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) , natomiast tylko skończona liczba wyrazów ciągu ma własność $a_n \leq m - \varepsilon$.

Przykład 4.1.2. Sprawdzić, że dla ciągu $a = ((-1)^n(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ liczby $M = 1$ i $m = -1$ mają własności sformułowane w twierdzeniu. Wyznaczyć zbiory ograniczeń $\mathcal{S}(a)$ i $\mathcal{I}(a)$.

Dowód Twierdzenia 4.1.3. Jeśli kres dolny $M_a = \inf \mathcal{S}(a)$ jest skończony, to z Lematu 4.1.1 wynika, że dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ różnica $M_a - \varepsilon < M_a$ nie należy do $\mathcal{S}(a)$, a zbiór $\{n \in \mathbb{N}; M_a - \varepsilon < a_n\}$ jest nieskończony. Z drugiej strony, skoro $M_a + \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{S}(a)$, istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $a_n \leq M_a + \frac{\varepsilon}{2} < M_a + \varepsilon$ dla $n \geq k$. Wnioskujemy stąd, że zachodzi inkluzja

$$\{n \geq k; M_a - \varepsilon < a_n\} \subset \{n \in \mathbb{N}; M_a - \varepsilon < a_n < M_a + \varepsilon\},$$

a zatem zbiór stojący po prawej stronie jest nieskończony – i liczba M_a , czyli granica górna ciągu a , spełnia warunki podane w (i).

Dla zakończenia dowodu pierwszej z tez twierdzenia założmy teraz, że liczba M spełnia oba warunki związane z dowolnym $\varepsilon > 0$. Z (4.2) i z warunku dotyczącego przedziału $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ wynika, że liczba $M - \varepsilon$ nie należy do $\mathcal{S}(a)$, a więc $M - \varepsilon \leq M_a$. Z drugiego z warunków wynika, że liczba $M + \varepsilon$ należy do $\mathcal{S}(a)$, a więc $M_a \leq M + \varepsilon$. Wobec dowolności ε oznacza to równość $M = M_a$.

Dowód opisanej w (ii) charakteryzacji granicy dolnej przebiega w pełni analogicznie i jest pozostawiony czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Z podanej wyżej charakteryzacji pojęcia granic łatwo wyprowadzić

Wniosek 4.1.4 (Własności granic górnych i dolnych: I). *Dowolny ciąg liczbowy $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jego granice – dolna i górna – są skończone. Wówczas obie granice zawierają się w przedziale $[\inf_n a_n, \sup_n a_n]$,*

$$\inf_n a_n \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq \sup_n a_n.$$

Dla dowolnego ciągu a zachodzą równości:

- (i) $\limsup_n (-a_n) = -\liminf_n a_n$, oraz
- (ii) dla dowolnych liczb $b, c \in \mathbb{R}$, jeśli $b > 0$, to

$$\limsup_n (b \cdot a_n + c) = b \limsup_n a_n + c \quad i \quad \liminf_n (b \cdot a_n + c) = b \liminf_n a_n + c.$$

Dowód. Ćwiczenie. Podkreślamy, że równości (i)–(ii) zachodzą także dla nieskończonych wartości granic. \square

Wniosek 4.1.5 (Własności granic górnych i dolnych: II). *Niech (a_n) i (b_n) będą dowolnymi ciągami liczb rzeczywistych.*

- (i) *Jeśli dla prawie wszystkich n zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to*

$$\limsup_n a_n \leq \limsup_n b_n \quad i \quad \liminf_n a_n \leq \liminf_n b_n.$$

(ii) Każda z nierówności

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n, \quad \text{oraz} \quad (4.6)$$

$$\liminf_n (a_n + b_n) \geq \liminf_n a_n + \liminf_n b_n, \quad (4.7)$$

jest spełniona, jeśli w podanej sumie granic przynajmniej jeden składnik jest wielkością skończoną (liczbą). Obie nierówności mogą być zastąpione przez równości, jeśli przynajmniej jeden z ciągów jest zbieżny.

Ćwiczenie 4.1.1. Znaleźć dwa ciągi liczb rzeczywistych, dla których nierówności wskazane w punkcie (ii) są ostre i nie mogą być zastąpione przez równość.

Dowód Wniosku 4.1.5. Z definicji rozważanych zbiorów wynikają oczywiste inkluzje $\mathcal{S}(b) \subset \mathcal{S}(a)$ oraz $\mathcal{I}(a) \subset \mathcal{I}(b)$. Własność (i) jest zatem konsekwencją podstawowych nierówności dla kresów (Twierdzenie 2.1.2).

W dowodzie nierówności (4.6) ograniczymy się do przypadku, gdy granice górne $M_a = \limsup_n a_n$ i $M_b = \limsup_n b_n$ są skończone; niech $a + b$ oznacza ciąg sum $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon > 0$. Z Twierdzenia 4.1.3 (i) wynika, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nie większe niż $M_a + \varepsilon$, a prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) – nie większe niż $M_b + \varepsilon$. Jeśli dla $n \geq k_a$ zachodzi nierówność $a_n \leq M_a + \varepsilon$, a dla $n \geq k_b$ – nierówność $b_n \leq M_b + \varepsilon$, gdzie k_a, k_b są pewnymi liczbami naturalnymi, to dla $n \geq k := \max\{k_a, k_b\}$ obie nierówności są prawdziwe. Wnioskujemy stąd, że dla wszystkich $n \geq k$ zachodzi nierówność $a_n + b_n \leq M_a + M_b + 2\varepsilon$, a więc liczba $M_a + M_b + 2\varepsilon$ należy do zbioru $\mathcal{S}(a + b)$, co daje nierówność

$$\inf \mathcal{S}(a + b) \leq M_a + M_b + 2\varepsilon.$$

Wobec dowolności ε otrzymujemy stąd $\inf \mathcal{S}(a + b) \leq M_a + M_b$, czyli nierówność (4.6).

Przypadek, gdy jeden ze składników i suma granic po prawej stronie wzoru są równe ∞ nie wymaga dowodu. Inaczej jest w przypadku, gdy po prawej stronie występuje wielkość $-\infty$ – stosowny dowód pojawi się niżej w odniesieniu do uogólnionego pojęcia nieskończonych granic ciągów.

Nierówność (4.7) można udowodnić w sposób analogiczny, ale wynika ona także z wykazanej już nierówności dla granic górnych i z Wniosku 4.1.4 (ii). Sprawdzenie tego faktu pozostawiamy czytelnikowi.

Jeśli o ciągu b założyć, że jest zbieżny, to korzystając z nierówności (4.6) dla ciągów $a' = (a_n + b_n)$ i $b' = (-b_n)$, otrzymujemy

$$\limsup_n (a'_n + b'_n) \leq \limsup_n (a_n + b_n) + \limsup_n (-b_n),$$

czyli

$$\limsup_n a_n \leq \limsup_n (a_n + b_n) - \lim_n b_n,$$

co oznacza nierówność przeciwną do (4.6). \square

Twierdzenie 4.1.3 nie wskazuje sposobu wyznaczania granic (dolnej i górnej), pozwala jednak na potwierdzenie, że „odgadnięta” liczba jest taką granicą. Kolejne twierdzenie podaje efektywny sposób wyznaczania wartości każdej z granic – nie tylko skończonych.

Twierdzenie 4.1.6. *Niech $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Jeśli ciąg a jest ograniczony z góry, to*

$$\limsup_n a_n = \inf_k (\sup\{a_n; n \geq k\}). \quad (4.8)$$

W przypadku ciągu ograniczonego z dołu zachodzi równość

$$\liminf_n a_n = \sup_k (\inf\{a_n; n \geq k\}). \quad (4.9)$$

Uwaga 4.1.1. Powyższe wzory uzasadniają przyjęte oznaczenia – zgodnie z Twierdzeniem 3.2.4 zbieżność ciągów monotonicznych występujących po prawej stronie implikuje równości

$$\limsup_n a_n = \limsup_k \{a_n; n \geq k\} \quad \text{ i } \quad \liminf_n a_n = \liminf_k \{a_n; n \geq k\}.$$

Przyjęte założenia dotyczące ograniczoności są konieczne, by wyrażenia stojące po prawej stronie równości (4.8)–(4.9) miały sens jako, odpowiednio, kres dolny i kres górny wskazanych ciągów liczbowych.

Dowód Twierdzenia 4.1.6. Oznaczmy $b_k := \sup\{a_n; n \geq k\}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, co oznacza $a_n \leq b_k$ dla $n \geq k$, a więc $b_k \in \mathcal{S}(a)$. Z Twierdzenia 2.1.4(iii) wynika zatem nierówność $\inf_k b_k \geq \inf \mathcal{S}(a)$.

Dla wykazania nierówności przeciwnej rozważmy dowolną liczbę $M \in \mathcal{S}(a)$. Istnieje zatem liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $a_n \leq M$ dla wszystkich $n \geq k$, a to oznacza nierówność $b_k \leq M$. Z Twierdzenia 2.1.4(iv) wnioskujemy równość kresów dolnych zbiorów $\{b_k; k \in \mathbb{N}\}$ i $\mathcal{S}(a)$.

W analogiczny sposób stwierdzamy, że każda z liczb $c_k = \inf\{a_n; n \geq k\}$ należy do zbioru $\mathcal{I}(a)$, dla $k \in \mathbb{N}$, przy czym kres górny zbioru $\{c_k; k \in \mathbb{N}\}$ jest równy $\sup \mathcal{I}(a)$. \square

Korzystając z pojęć granicy górnej i granicy dolnej możemy podać podstawowy warunek konieczny i dostateczny istnienia granicy ciągu.

Twierdzenie 4.1.7. *[O równości granic] Ograniczony ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość*

$$\liminf_n a_n = \limsup_n a_n. \quad (4.10)$$

Wspólna wartość obu granic – górnej i dolnej – jest wówczas jedyną granicą ciągu.

Dowód. Granica ciągu zbieżnego spełnia – z definicji – wszystkie warunki podane w Twierdzeniu 4.1.3, a więc jest jednocześnie granicą dolną i granicą górną ciągu.

Założmy zatem, że ciąg (a_n) jest ograniczony i spełnia warunek (4.10), a liczba g oznacza wspólną wartość obu porównywanych granic. Zgodnie z cytowanym twierdzeniem, dla każdego $\varepsilon > 0$ tylko skończona liczba wyrazów ciągu spełnia nierówności $a_n \geq g + \varepsilon$ i, podobnie, tylko skończona liczba wyrazów spełnia nierówności $a_n \leq g - \varepsilon$. Tym samym dla prawie wszystkich n otrzymujemy $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$, co oznacza zbieżność ciągu i równość $\lim_n a_n = g$. \square

4.2 Granice niewłaściwe

Równość (4.10) podpowiada możliwość rozszerzenia definicji granicy ciągu $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i dopuszczenie możliwych granic nieskończonych, obejmujących wykluczające się wzajemnie przypadki, gdy $\mathcal{I}(a) = \mathbb{R}$ lub $\mathcal{S}(a) = \mathbb{R}$.

Definicja 4.2.1. *Ciąg $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy rozbieżnym do ∞ (do plus nieskończoności), co zapisujemy jako $\lim_n a_n = \infty$, jeśli spełnia warunek*

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n > M \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Ciąg a jest rozbieżny do $-\infty$ (do minus nieskończoności), co zapisujemy jako $\lim_n a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad a_n < m \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

W opisaney wyżej sytuacji nieskończone wartości granic nazywamy granicami niewłaściwymi. Mówimy także, że wyrazy ciągu dążą do $\pm\infty$ i używamy zapisu $a_n \rightarrow \infty$ albo $a_n \rightarrow -\infty$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Wniosek 4.2.1. Ciągi rozbieżne do nieskończoności charakteryzują własności

$$\begin{aligned}\lim_n a_n = \infty &\iff \lim_n \inf a_n = \lim_n \sup a_n = \infty \\ \lim_n a_n = -\infty &\iff \lim_n \inf a_n = \lim_n \sup a_n = -\infty\end{aligned}\quad \square$$

Twierdzenie 4.2.2 (Własności granic niewłaściwych). Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach niezerowych ma miejsce równoważność

$$(i) \lim_n \frac{1}{a_n} = 0 \iff \lim_n |a_n| = \infty.$$

W przypadku, gdy ciąg a jest rozbieżny do ∞ , prawdziwe są równości

$$(ii) \lim_n (-a_n) = -\infty,$$

$$(iii) \lim_n (a_n + b_n) = \infty,$$

jeśli $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem ograniczonym z dołu, oraz

$$(iv) \lim_n (a_n \cdot b_n) = \infty,$$

jeśli dla pewnej liczby $\delta > 0$ nierówność $b_n \geq \delta$ zachodzi dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Własność (i) wynika z oczywistej równoważności warunków

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon \iff \forall M > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k |a_n| > M,$$

w której liczba M odpowiada odwrotności liczby ε i odwrotnie. Analogiczne porównanie warunków rozbieżności do $\pm\infty$ dowodzi równości (ii).

Jeśli liczba $m \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem dolnym ciągu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, to, wybierając dla dowolnego $M \in \mathbb{R}$ indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że $a_n > M - m$ dla $n \geq k$, otrzymujemy nierówności

$$a_n + b_n > M + (b_n - m) \geq M \quad \text{dla wszystkich } n \geq k.$$

Wobec dowolności M oznacza to rozbieżność ciągu sum do plus nieskończoności.

W przypadku (iv), jeśli nierówność $b_n \geq \delta > 0$ zachodzi dla $n \geq k_b$, to biorąc dowolną liczbę dodatnią $M \in \mathbb{R}$ i wybierając indeks k_a taki, że $a_n > \frac{M}{\delta}$ dla $n \geq k_a$, otrzymujemy nierówności

$$a_n \cdot b_n > M \cdot \frac{b_n}{\delta} \geq M \quad \text{dla } n \geq \max\{k_a, k_b\},$$

co kończy dowód. \square

Wniosek 4.2.3. (i) $\lim_n a^n = \infty$ i $\lim_n a^{-n} = 0$ dla $a > 1$, oraz

$$(ii) \lim_n n^a = \begin{cases} \infty & \text{dla } a > 0, \\ 0 & \text{dla } a < 0. \end{cases}$$

Dowód. (i) Z własności (3.10) wynika zbieżność

$$\lim_n \frac{1}{a^n} = \lim_n a^{-n} = \lim_n \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0,$$

a zatem także $\lim_n a^n = \infty$.

(ii) Jeśli $a \in \mathbb{N}$, własność $\lim_n n^a = \infty$ wynika z Twierdzenia 4.2.2(iv) i może być także sprawdzona bezpośrednio z definicji. Dla wykładnika rzeczywistego $a \geq 1$ i części całkowitej $[a] \in \mathbb{N}$ równość $\lim_n n^{[a]} = \infty$ oznacza, że dla dowolnej liczby $M \in \mathbb{R}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $n^{[a]} > M$, jeśli $n \geq m$. Z monotoniczności potęgi wynika wówczas nierówność $n^a \geq n^{[a]} > M$ dla $n \geq m$.

W przypadku, gdy $a \in (0, 1)$, istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $a \geq \frac{1}{k}$. Dla dowolnej liczby $M > 0$, nierówności $n^a \geq \sqrt[k]{n} > M$ spełnione są, jeśli tylko $n > M^k$. Wykazaliśmy tym samym, że $\lim_n n^a = \infty$ dla $a > 0$.

Istnienie granicy równej 0 dla $a < 0$ wynika teraz z Twierdzenia 4.2.2(i). \square

Przykład 4.2.1. Kontynuujemy badanie granic ciągów o wyrazach ogólnych postaci $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, gdzie P i Q są ustalonymi wielomianami stopnia odp. k i l (Przykład 3.5.2). Przyjmujemy, że znana już jest granica $\lim_n a_n = 0$ w przypadku, gdy $k < l$, a do wyznaczenia pozostaje granica niewłaściwa ciągu przy założeniu $k > l$, co w szczególności obejmuje przykład dowolnego wielomianu P stopnia $k \in \mathbb{N}$, gdy $Q \equiv 1$.

Zauważmy, że dowolny wielomian P stopnia $k > 0$, dla którego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi $b_k = 1$, spełnia nierówność

$$P(n) = n^k \left(1 + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^k} \right) \geq n^k \left(1 - \frac{|b_{k-1}|}{n} - \dots - \frac{|b_0|}{n} \right) > 0,$$

dla wszystkich $n > |b_{k-1}| + \dots + |b_0|$. W przypadku, gdy również wielomian Q ma współczynnik $c_l = 1$, wynika stąd, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ są dodatnie. W połączeniu z równoważnością opisaną w Twierdzeniu 4.2.2(i) oznacza to istnienie granicy niewłaściwej $\lim_n a_n = \infty$. W ogólnym przypadku zachodzi równość

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \operatorname{sgn} \left(\frac{b_k}{c_l} \right) \cdot \infty, \quad \text{gdy } k = \deg P > l = \deg Q.$$

4.3 Podciągi

Wzajemny związek pojęć granicy dolnej i górnej oraz pojęcia granicy jest dużo głębszy i kieruje naszą uwagę w stronę *podciągów zbieżnych*.

Definicja 4.3.1. Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i dowolnego rosnącego ciągu liczb naturalnych $m = (m_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wybrane z ciągu a wyrazy o indeksach (numerach) m_k tworzą podciąg $(a_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu a , czyli funkcję będącą złożeniem $a \circ m: k \mapsto a(m(k))$ funkcji a i m .

Zgodnie z przedstawionym niżej twierdzeniem, zarówno granica górna jak i granica dolna ciągu są granicami (w sensie *mocnym*, czyli bez przymiotnika) – jednak niekoniecznie „całego” ciągu, tylko pewnych szczególnych podciągów.

Twierdzenie 4.3.1 (O podciągach). Niech $a = (a_n)$ będzie dowolnym ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas:

(i) Dla dowolnego podciągu $(a_{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ciągu a zachodzą nierówności

$$\liminf_n a_n \leq \liminf_n a_{h_n} \leq \limsup_n a_{h_n} \leq \limsup_n a_n.$$

Jeśli zatem podciąg jest ciągiem zbieżnym, to jego granica $\lim_n a_{h_n}$ należy do przedziału $[\liminf_n a_n, \limsup_n a_n]$.

(ii) Ograniczony, rozbieżny ciąg a zawiera przynajmniej dwa podciągi zbieżne $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(a_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ takie, że

$$\liminf_n a_n = \lim_n a_{k_n} \quad i \quad \lim_n a_{l_n} = \limsup_n a_n.$$

Jako wniosek otrzymujemy stąd klasyczne, ważne twierdzenie.

Wniosek 4.3.2 (Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa). Każdy ograniczony ciąg liczbowy zawiera podciąg zbieżny. \square

Definicja 4.3.2. Liczbę g nazywamy punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jeżeli istnieje podciąg $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do g .

Wniosek 4.3.3. Granica górna $\limsup_n a_n$ dowolnego ograniczonego ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest największym, a granica dolna $\liminf_n a_n$ – najmniejszym punktem skupienia. \square

Dowód Twierdzenia 4.3.1. Dowodu nierówności stanowiących własność (i) ograniczymy do granic górnych – wykażemy inkluzję $\mathcal{S}(a) \subset \mathcal{S}(a_h)$, w której $a_h = (a_{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ oznacza dowolny podciąg w a , natomiast porównywane są zbiory występujące w definicji granic górnych. Jeśli zatem $M \in \mathcal{S}(a)$ jest dowolną liczbą o własności (4.2), to dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ wszystkie wyrazy ciągu o indeksach $n \geq k$ spełniają nierówność $a_n \leq M$. Dotyczy to także wyrazów a_{h_n} o indeksach $h_n \geq k$, a ponieważ ciąg (h_n) jest rosnący, prawie

wszystkie jego wyrazy mają tę własność, czyli $M \in \mathcal{S}(a_h)$. Przechodząc do kresów dolnych otrzymujemy

$$\limsup_n a_{h_n} = \inf \mathcal{S}(a_h) \leq \inf \mathcal{S}(a) = \limsup_n a_n.$$

Dowód analogicznej własności dla granic dolnych pozostawiamy czytelnikowi, który może też skorzystać z zależności sformułowanej we Wniosku 4.1.4(ii).

Zgodnie z podaną w Twierdzeniu 4.1.3(i) charakteryzacją granicy górnej $M_a = \limsup_n a_n$, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ zbiór indeksów

$$\{n \in \mathbb{N}; a_n \in (M_a - \varepsilon, M_a + \varepsilon]\} \quad (4.13)$$

jest nieskończony. W przypadku podzbiorów liczb naturalnych, nieskończoność oznacza nieograniczoność [Wstęp do LiTM], a zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór (4.13) zawiera liczby *dowolnie duże*, co zapisujemy formalnie jako własność

$$\forall r \in \mathbb{N} \exists s \in \mathbb{N} (s > r) \text{ i } a_s \in (M_a - \varepsilon, M_a + \varepsilon]. \quad (4.14)$$

Możemy teraz wskazać podciąg (a_{l_n}) , konstruując rosnący ciąg liczb naturalnych $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w taki sposób, by $a_{l_1} \in (M_a - 1, M_a + 1]$, a kolejne wyrazy spełniały warunek

$$l_n > l_{n-1} \quad \text{ i } \quad M_a - \frac{1}{n} < a_{l_n} \leq M_a + \frac{1}{n},$$

dla $n > 1$. Opisana w ten sposób indukcyjna definicja podciągu zapewnia prawdziwość nierówności

$$M_a - \frac{1}{n} < a_{l_m} \leq M_a + \frac{1}{n} \quad \text{ dla wszystkich } m \geq n,$$

co oznacza zbieżność podciągu i równość $\lim_n a_{l_n} = M_a$. Jak poprzednio, konstrukcję podciągu zbieżnego do granicy dolnej pozostawiamy czytelnikowi. \square

Ćwiczenie 4.3.1. Sprawdzić, że ciąg monotoniczny jest ograniczony, jeśli zawiera przynajmniej 1 podciąg ograniczony. O zbieżności ciągu monotonicznego decyduje zatem zbieżność pojedynczego (dowolnego) podciągu.

Z Twierdzenia 4.1.7 oraz Twierdzenia 4.3.1(ii) wynika

Wniosek 4.3.4. *Ograniczony ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego podciągi zbieżne mają tę samą granicę.* \square

Definicja 4.3.3. Dla dowolnych ciągów $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ każdy ciąg $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ utworzony z wyrazów obu ciągów, zawierający a i b jako swoje podciągi będziemy nazywać mieszaniną ciągów a i b . Dokładniej, niech para zbiorów

$$N_1 = \{p_k; k \in \mathbb{N}\}, \quad N_2 = \{q_k; k \in \mathbb{N}\} \quad (4.15)$$

będzie dowolnym rozkładem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$ na dwa zbiory rozłączne i nieskończone, przy czym $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ są rosnącymi ciągami liczb naturalnych. Mieszaniną ciągów a i b wyznaczoną przez rozkład (N_1, N_2) nazywać będziemy ciąg c taki, że

$$c_n = \begin{cases} a_k, & \text{gdy } n = p_k \in N_1, \\ b_k, & \text{gdy } n = q_k \in N_2. \end{cases} \quad \text{oraz} \quad (4.16)$$

Stwierdzenie 4.3.5. Jeśli ciąg $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest mieszaniną ciągów a i b , o granicach $g = \lim_n a_n$ i $h = \lim_n b_n$, to wszystkie punkty skupienia ciągu c ograniczają się do zbioru $\{g, h\}$.

Dowód. Dowolny podciąg $c_m = (c_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$, jeśli jest zbieżny, ma jako granicę tylko jedną z dwu możliwości: g lub h . Istotnie, jeśli podciąg c_m zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu a , to zawiera także taki podciąg, który jest jednocześnie podciągiem ciągu a – i jego granicą musi być liczba g . Szczegółowe uzasadnienie przedstawionego tu rozumowania i sprawdzenie, że w przeciwnym przypadku granicą jest liczba h , pozostawiamy czytelnikowi. \square

Wniosek 4.3.6. Mieszanina dwu ciągów zbieżnych do tej samej granicy g jest również ciągiem zbieżnym do g .

Dowód (bezpośredni). Jeśli $\lim_n a_n = g = \lim_n b_n$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją indeksy $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq n_a$ i $|b_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq n_b$. Dla ciągu c będącego mieszaniną (4.16) względem rozkładu (4.15), oznacza to nierówności

$$|c_{p_n} - g| < \varepsilon \quad \text{dla } n \geq n_a \quad \text{i} \quad |c_{q_n} - g| < \varepsilon \quad \text{dla } n \geq n_b.$$

Stąd $|c_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq \max\{p_{n_a}, q_{n_b}\}$, a zatem – wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ – ciąg c jest zbieżny do g . \square

Przykład 4.3.1. Ciąg

$$q = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{0}{5}, \dots \right)$$

zawiera wszystkie liczby wymierne z przedziału $[0, 1]$ (każdą – nieskończenie wiele razy). Wiedząc, że kolejne wystąpienia w ciągu q liczby $0 = \frac{0}{k}$ odpowiadają wyrazom $q_{\frac{k(k+1)}{2}}$, dla $k \in \mathbb{N}$, możemy wyrazy ciągu opisać za pomocą wzoru

$$q_n = \frac{n - \frac{k(k+1)}{2}}{k}, \quad \text{jeśli } \frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [0, 1]$ istnieje podciąg (q_{k_n}) zbieżny do x . Co więcej, *każdy ciąg liczb wymiernych* zawarty w przedziale $[0, 1]$ jest podciągiem ciągu q .

Uwaga 4.3.1. Wskazany w Definicji 4.3.1 rosnący ciąg indeksów $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do ∞ . Jeśli za m przyjąć dowolny ciąg liczb naturalnych rozbieżny do plus nieskończoności, czyli taki, że $\lim_n m_n = \infty$, to ciąg $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ możemy uważać za *uogólniony podciąg* ciągu a . Udowodnione niżej twierdzenie uzasadnia alternatywne, często stosowane oznaczenie dla granic ciągów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_n a_n,$$

w którym granica po n dążącym do nieskończoności oznacza wspólną wartość wszystkich granic $\lim_n a_{m_n}$, niezależną od ciągu indeksów $m_n \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 4.3.7. *Dla każdego ciągu liczbowego zbieżnego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i dowolnego ciągu liczb naturalnych $m = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dążącego do ∞ , ciąg $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i zachodzi równość*

$$\lim_n a_{m_n} = \lim_n a_n.$$

Dowód. Niech $g = \lim_n a_n$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje indeks $k_a \in \mathbb{N}$ taki, że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq k_a$. Z rozbieżności ciągu m wynika istnienie indeksu $k_m \in \mathbb{N}$ takiego, że dla wszystkich $n \geq k_m$ zachodzi nierówność $m_n > k_a$, a zatem

$$|a_{m_n} - g| < \varepsilon, \quad \text{jeśli tylko } n \geq k_m. \quad \square$$

Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia, czy podana w twierdzeniu równość zachodzi także dla granic niewłaściwych.

Wbrew pozorom, operacje korzystające z ciągów rozbieżnych w kontrolowany sposób, czyli mających granice niewłaściwe, nie są bezprzedmiotowe i mogą prowadzić do ważnych *skończonych* wyników, o czym świadczy np.

Twierdzenie 4.3.8. *Dla dowolnego ciągu liczbowego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rozbieżnego do ∞ zachodzą równości*

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \text{oraz} \quad (4.17)$$

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}. \quad (4.18)$$

Dowód. Ciąg dążący do ∞ ma prawie wszystkie wyrazy większe niż 1; bez zmniejszenia ogólności możemy zatem założyć nierówność $a_n > 1$ dla wszystkich n . Przyjmując $m_n = \lfloor a_n \rfloor$ dla $n \in \mathbb{N}$, konstruujemy rozbieżny do ∞ ciąg liczb naturalnych spełniający warunek

$$m_n \leq a_n \leq m_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z monotoniczności potęgi o wykładniku rzeczywistym opisanej w Stwierdzeniu 2.3.1, otrzymujemy zatem nierówności

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1},$$

czyli

$$\frac{m_n + 1}{m_n + 2} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right).$$

Z Twierdzenia 3.3.2 i Twierdzenia 4.3.7 dla ciągów (m_n) i $(m_n + 1)$ wynika, że skrajne wyrazy w powyższej nierówności dążą do wspólnej granicy – liczby e .

W dowodzie istnienia granicy (4.18) korzystamy z analogicznych nierówności

$$\left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \leq \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 - \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right).$$

Ostateczna konkluzja wynika w obu przypadkach z Twierdzenia o 3 ciągach. \square

4.4 Ciągi Cauchy'ego

Definicja 3.2.2 i twierdzenia charakteryzujące granicę ciągu jako liczbę spełniającą pewne warunki zakładają, że wielkość $g = \lim_n a_n$ jest w jakimś sensie znana, a przynajmniej przewidujemy jej wartość. W sytuacji, gdy nie mamy „kandydatki” na granicę ciągu, szczególnie ważna okazuje się *wewnętrzna* charakteryzacja zbieżności, pochodząca od Cauchy'ego.

Definicja 4.4.1. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego lub spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m, n \geq k.$$

Ćwiczenie 4.4.1. Na to, by ciąg (a_n) był ciągiem Cauchy’ego potrzeba i wystarcza, by spełniał pozornie słabszy warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} |a_n - a_k| < \varepsilon \quad \text{dla } n > k. \quad (4.19)$$

Twierdzenie 4.4.1. *Dowolny ciąg liczbowy $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy’ego.*

Dowód. Jeśli ciąg a jest zbieżny do liczby g , to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że dla wszystkich $n \geq k$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \geq k$ mamy zatem

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - g| + |g - a_n| < \varepsilon,$$

co oznacza że a jest ciągiem Cauchy’ego i potwierdza, że jest to warunek konieczny zbieżności.

Założmy teraz, że ciąg a spełnia warunek Cauchy’ego w (pozornie) słabszej postaci (4.19). Biorąc $\varepsilon = 1$, stwierdzamy ograniczoność ciągu – w taki sam sposób, jak w dowodzie ograniczoności ciągu zbieżnego (Twierdzenie 3.2.3). Zgodnie z Twierdzeniem 4.1.7, wystarczy wykazać równość granicy dolnej i granicy górnej ciągu. Z założenia, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$a_k - \varepsilon < a_n < a_k + \varepsilon \quad \text{dla } n \geq k.$$

Z Wniosku 4.1.2 wynikają zatem nierówności

$$a_k - \varepsilon \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq a_k + \varepsilon$$

oraz

$$0 \leq \limsup_n a_n - \liminf_n a_n \leq 2\varepsilon.$$

Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza to równość $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$, czyli zbieżność badanego ciągu. \square

Pierwszym zastosowaniem ciągów Cauchy’ego jest dla nas następujący, pomocniczy wynik, uzupełniający konstrukcję potęgi o wykładniku rzeczywistym (por. Definicja 2.3.1) o jawny wzór – w postaci granicy.

Lemat 4.4.2. *Jeśli liczba a jest dodatnia, zaś x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to dla każdego ciągu $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożonego z liczb wymiernych i zbieżnego do x ciąg potęg $(a^{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i zachodzi równość*

$$\lim_n a^{p_n} = a^x.$$

Dowód. Niech $a > 1$. Zgodnie z założeniem rozważmy dowolny ciąg $p_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, zbieżny do $x \in \mathbb{R}$. Zbieżność implikuje ograniczoność $p_n \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$ i pewnej liczby naturalnej M . Ponieważ p jest ciągiem Cauchy’ego, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n_k \in \mathbb{N}$ takie, że $|p_n - p_{n_k}| < \frac{1}{k}$, dla wszystkich $n \geq n_k$. W zależności od tego, która z liczb p_n, p_{n_k} jest większa, prawdziwe jest oszacowanie

$$|a^{p_n} - a^{p_{n_k}}| = \left\{ \begin{array}{l} a^{p_{n_k}} (a^{p_n - p_{n_k}} - 1) \\ a^{p_n} (a^{p_{n_k} - p_n} - 1) \end{array} \right\} \leq a^M (a^{\frac{1}{k}} - 1) \leq a^M \frac{a - 1}{k},$$

gdzie korzystamy z własności potęgi o wykładniku wymiernym (wn. 2.2.4) oraz ze Stwierdzenia 2.2.3(ii). Z uzyskanej nierówności wynika, że potęgi a^{p_n} tworzą dla $n \in \mathbb{N}$ ciąg Cauchy’ego, a zatem istnieje granica $g = \lim_n a^{p_n}$.

Aby wykazać równość $g = a^x$, wybierzmy w ciągu $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podciąg $(p_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|p_{m_n} - x| < \frac{1}{n}$. Na mocy Wniosku 2.3.2 prawdziwa jest implikacja

$$p_{m_n} - \frac{1}{n} < x < p_{m_n} + \frac{1}{n} \implies a^{p_{m_n} - \frac{1}{n}} \leq a^x \leq a^{p_{m_n} + \frac{1}{n}}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, przy czym skrajne ciągi mają tę samą granicę

$$\lim_n a^{p_{m_n} - \frac{1}{n}} = \lim_n a^{p_{m_n}} / \lim_n \sqrt[n]{a} = g, \quad \text{ i }$$

$$\lim_n a^{p_{m_n} + \frac{1}{n}} = \lim_n a^{p_{m_n}} \cdot \lim_n \sqrt[n]{a} = g.$$

Równość $g = a^x$ wynika zatem z twierdzenia o trzech ciągach.

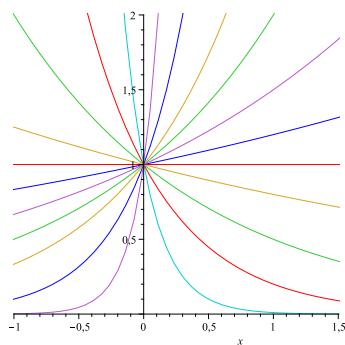
Dla $a = 1$ teza lematu jest oczywista. W przypadku, gdy $a \in (0, 1)$, korzystamy z wykazanej wyżej równości granic dla $b = a^{-1}$. Otrzymujemy

$$\lim_n a^{p_n} = \lim_n b^{-p_n} = b^{-x} = a^x. \quad \square$$

4.5 Funkcja wykładnicza – własności

Korzystając z Lematu 4.4.2 możemy teraz zakończyć proces definiowania i badania własności potęgi o dodatniej podstawie i dowolnym wykładniku rzeczywistym. Podstawowym problemem było stopniowe rozszerzanie zbioru dopuszczalnych wykładników – począwszy od liczb naturalnych, poprzez liczby całkowite i wymierne, aż do dowolnych wartości rzeczywistych.

Definicja 4.5.1. *Dla dowolnej liczby $a > 0$ funkcję, która dowolnej liczbie $x \in \mathbb{R}$ przypisuje wartość potęgi $a^x \in \mathbb{R}$, nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a .*



Rysunek 4.1: Funkcje wykładnicze dla różnych podstaw

Niejako przy okazji otrzymaliśmy także *funkcje potęgowe*, postaci x^a dla $x > 0, a \in \mathbb{R}$. Zajmiemy się nimi dokładniej w podrozdziałach 6.4 i 9.2.

Twierdzenie 4.5.1 (O potęgowaniu). *Dla $a, b > 0$ i dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x \quad i \quad (a^x)^y = a^{xy}. \quad (4.20)$$

Dowód. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ ustalmy ciągi liczb wymiernych $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie, że $x = \lim_n p_n$ i $y = \lim_n q_n$. Korzystając z Wniosku 2.2.4 i udowodnionego wyżej lematu, otrzymujemy równości

$$a^{x+y} = \lim_n a^{p_n+q_n} = \lim_n (a^{p_n} \cdot a^{q_n}) = a^x \cdot a^y,$$

oraz

$$(ab)^x = \lim_n (ab)^{p_n} = \lim_n (a^{p_n} \cdot b^{p_n}) = a^x \cdot b^x,$$

dla dowolnych $a, b > 0$.

Dla dowodu ostatniej z równości zauważmy, że jest ona prawdziwa, gdy $x = 0$ lub $y = 0$, oraz w przypadku $x = p \in \mathbb{Q}$, gdyż wówczas

$$(a^p)^y = \lim_n (a^p)^{q_n} = \lim_n a^{pq_n} = a^{py}. \quad (4.21)$$

Rozważając teraz dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ różne od 0, przyjmujemy $a > 1$ i zakładamy dodatkowo (ograniczając się ewentualnie do stosownych podciągów), że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$p_n - \frac{1}{n} \leq x \leq p_n + \frac{1}{n} \quad i \quad q_n - \frac{1}{n} \leq y \leq q_n + \frac{1}{n}.$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ze zbieżności ciągów wnioskujemy, że dla prawie wszystkich n liczby $p_n \pm \frac{1}{n}$ i $q_n \pm \frac{1}{n}$ mają ten sam znak co, odpowiednio, x i y . Mnożąc

oszacowanie dla x przez y , w zależności od znaku liczby y otrzymujemy zatem nierówności

$$\begin{aligned} (p_n - \frac{1}{n})y &\leq xy \leq (p_n + \frac{1}{n})y, \text{ gdy } y > 0, \text{ albo} \\ (p_n + \frac{1}{n})y &\leq xy \leq (p_n - \frac{1}{n})y, \text{ gdy } y < 0, \end{aligned}$$

co możemy w jednolity sposób zapisać w postaci

$$\left(p_n - \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n}\right)y \leq xy \leq \left(p_n + \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n}\right)y.$$

Takie same, zależne od znaku y , czynniki pojawiają się, jeśli strony nierówności $a^{(p_n - \frac{1}{n})} \leq a^x \leq a^{(p_n + \frac{1}{n})}$ podnieść do potęgi y i skorzystać ze Stwierdzenia 2.3.1. Wobec równości (4.21) wynika stąd

$$a^{(p_n - \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n})y} \leq (a^x)^y \leq a^{(p_n + \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n})y},$$

i konsekwentnie, zależnie od wspólnego znaku x i liczb $p_n \pm \frac{1}{n}$,

$$a^{(p_n - \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n})(q_n - \frac{\operatorname{sgn}(x)}{n})} \leq (a^x)^y \leq a^{(p_n + \frac{\operatorname{sgn}(y)}{n})(q_n + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{n})},$$

dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zgodnie z Lematem 4.4.2, z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę $a^{xy} = (a^x)^y$ – o ile $a \geq 1$.

Ponieważ pozostał nam dowód w przypadku $0 < a < 1$, skorzystamy z udowodnionej wcześniej równości $a^x \cdot (\frac{1}{a})^x = 1$, a więc

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \text{dla } a > 0 \text{ i } x \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Mamy zatem

$$\frac{1}{(a^x)^y} = \left(\frac{1}{a^x}\right)^y = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^x\right)^y = \left(\frac{1}{a}\right)^{xy} = \frac{1}{a^{xy}},$$

co kończy dowód. □

Przedstawiony tu proces konstrukcji funkcji wykładniczej o dowolnej podstawie $a > 0$ zamyka klasyczne twierdzenie charakteryzujące funkcję wykładniczą, której podstawa jest liczbą Eulera e .

Twierdzenie 4.5.2. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość*

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (4.23)$$

Dowód. Rozważmy przypadek $x > 0$. Z własności (4.20) wynika tożsamość

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n x} = \left(\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^x,$$

gdzie $a = \left(\frac{n}{x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem rozbieżnym do ∞ . W przypadku, gdy $x < 0$, dla $a_n = \left(\frac{n}{|x|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mamy z kolei

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{|x|},$$

przy czym zgodnie z Twierdzeniem 4.3.8, $\lim_n \left(1 \pm \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e^{\pm 1}$. Ponieważ przypadek $x = 0$ jest oczywisty, równość (4.23) wynika z udowodnionego niżej ogólniejszego Stwierdzenia 4.5.4. \square

Wniosek 4.5.3. $e^x \geq 1 + x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \text{jeśli } x \geq -n. \quad (4.24)$$

Dowód. Z Wniosku 1.2.4 wynikają nierówności

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x, \quad \text{jeśli } x \geq -n,$$

dla każdej liczby naturalnej n . Ustalając dowolne $x \in \mathbb{R}$ i przechodząc do granicy otrzymujemy stąd nierówność $e^x \geq 1 + x$. Jeśli tym razem ustalimy $n \in \mathbb{N}$, to dla $x \geq -n$ z nierówności

$$e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n} \geq 0$$

wynika relacja $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 0$. \square

Ćwiczenie 4.5.1. Porównać na wspólnym wykresie funkcje występujące w nierówności (4.24) – dla różnych wartości liczby $n \in \mathbb{N}$.

Stwierdzenie 4.5.4. Dla dowolnego zbieżnego ciągu liczbowego $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i dowolnej liczby rzeczywistej x ,

- (i) jeśli $\lim_n b_n > 0$, to $\lim_n b_n^x = (\lim_n b_n)^x$, oraz
- (ii) jeśli $x > 0$, $\lim_n b_n = 0$ i wyrazy ciągu b są nieujemne, to $\lim_n b_n^x = 0$.

Dowód. Ze względu na tożsamość $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ i własność (iv) podaną w Twierdzeniu 3.4.1, możemy ograniczyć się w dowodzie do przypadku $x > 0$. Jeśli $\lim_n b_n = g > 0$, to istnieje indeks $k_b \in \mathbb{N}$ taki, że nierówność $b_n > 0$ zachodzi dla $n \geq k_b$, a zatem poprawnie zdefiniowany jest ciąg potęg $(b_n^x)_{n \geq k_b}$

i można badać jego zbieżność. Z algebraicznych własności potęgi wynika tożsamość

$$b_n^x - g^x = g^x \left(\left(\frac{b_n}{g} \right)^x - 1 \right), \quad \text{dla } n \geq k_b,$$

w której podstawy potęgi tworzą ciąg $c = (\frac{b_n}{g})_{n \geq k_b}$ zbieżny do liczby 1. Dla dowodu (i) oznaczamy $m = \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ i rozważamy dowolną liczbę $\varepsilon \in (0, \frac{1}{m})$. Z własności $\lim_n c_n = 1$ wynika istnienie indeksu $k \geq k_b$ takiego, że $|c_n - 1| < \varepsilon$, dla $n \geq k$. Stąd także

$$1 - \varepsilon < c_n < 1 + \varepsilon < \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

a więc, zgodnie z Wnioskiem 2.3.3, $1 - m\varepsilon < c_n^x < \frac{1}{1 - m\varepsilon}$. Wprawdzie nierówność ta pozwala na bezpośredni dowód zbieżności $c_n^x \rightarrow 1$ (z Definicji 3.2.2 – ćwiczenie), zamiast tego skorzystamy jednak z Wniosku 4.1.4(i), co prowadzi do nierówności

$$1 - m\varepsilon \leq \liminf_n c_n^x \leq \limsup_n c_n^x \leq \frac{1}{1 - m\varepsilon}$$

prawdziwej dla każdej, dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$. Oznacza to równość granic $\liminf_n c_n^x = \limsup_n c_n^x$ i w konsekwencji zbieżność $\lim_n c_n^x = 1$. Stąd

$$\lim_n (b_n^x - g^x) = g^x \lim_n \left(\left(\frac{b_n}{g} \right)^x - 1 \right) = 0,$$

co kończy dowód własności (i). W przypadku opisanym w (ii), gdy $\lim_n b_n = 0$, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ rozważamy liczbę $\varepsilon' = \varepsilon^{\frac{1}{x}} > 0$. Ze zbieżności ciągu do 0 wynika istnienie indeksu $k \in \mathbb{N}$ takiego, że $0 \leq b_n < \varepsilon'$ dla $n \geq k$. Wówczas także $0 \leq b_n^x < \varepsilon'^x = \varepsilon$, co oznacza zbieżność $b_n^x \rightarrow 0$. \square

Udowodniona wyżej własność oznacza, że potęga o wykładniku rzeczywistym jest *ciągła względem podstawy*. Temat ciągłości jest szczegółowo opisany w dalszych podrozdziałach dotyczących funkcji.

Rozdział 5

Do szeregu!

5.1 Szeregi liczbowe

Pośród ciągów badanych w poprzednich podrozdziałach łatwo wyróżnić te, których wyrazy są sumami coraz większej liczby mniej lub bardziej podobnych składników. Stąd

Definicja 5.1.1. Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ciąg sum częściowych $\sum a = (\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach

$$\sum a_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n,$$

dla $n \in \mathbb{N}$, nazywamy szeregiem (liczbowym) o wyrazach $a_n, n \in \mathbb{N}$. Jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny, szereg nazywamy zbieżnym, a liczbę

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n \sum a_n = \lim_n \sum_{k=1}^n a_k \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

nazywamy sumą szeregu. Istnienie stosownej granicy niewłaściwej dla szeregu zapisujemy zgodnie z przyjętym wyżej oznaczeniem jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Zbieżność szeregu $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest nowym pojęciem i nie wymaga odrębnej definicji. Wbrew utartemu, ale kłopotliwemu zwyczajowi, proponujemy odrębne (choć podobne) oznaczenia dla sumy szeregu i dla samego szeregu – niezależnie od jego zbieżności.

Uwaga 5.1.1. Szereg liczbowy jest inną formą zapisu ciągu. Każdy ciąg liczbowy $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ może być jednoznacznie zinterpretowany jako szereg

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $a_1 = x_1$ i $a_n = x_n - x_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Jeśli są zbieżne, ciąg i odpowiadający mu szereg mają tę samą granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Spojrzenie na ciągi jako na szeregi, w których o zbieżności i ewentualnej granicy (sumie) decydują przyrosty pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu, przyniosło wiele ważnych metod badawczych i obliczeniowych. Podstawowe koncepcje specyficzne dla szeregów stanowią treść bieżącego podrozdziału.

Przykład 5.1.1. Szeregi, które zbadaliśmy do tej pory:

- (i) $x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ – rozwinięcie dziesiętne dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ – szereg *harmoniczny*, rozbieżny do ∞ ;
- (iii) $(\sum \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ – szereg *harmoniczny stopnia 2*, zbieżny;
- (iv) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ – szereg *geometryczny*, zbieżny dla $a \in (-1, 1)$;
- (v) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ – szereg zbieżny do liczby Eulera.

Uwaga 5.1.2. Przykłady występujące w *Analizie* sygnalizują potrzebę dopuszczenia do rozważań szeregów i ciągów określonych dla indeksów naturalnych lub ogólniej ze zbioru $\mathbb{N} \cup \{0\}$ począwszy od pewnej wartości początkowej $m \geq 0$. Proponujemy oznaczenia

$$(x_n)_{n \geq m}, \quad (\sum a_n)_{n \geq m}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq m} a_n \quad (5.2)$$

odpowiednio dla ciągu o wskazanym zbiorze indeksów, dla szeregu złożonego z sum częściowych $\sum_{k=m}^n a_k, n \geq m$, i dla granicy (czyli sumy szeregu) w przypadku, gdy szereg jest zbieżny.

Przykład 5.1.2. Szereg $(\sum \frac{1}{n(n-1)})_{n \geq 2}$ jest zbieżny i

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_n \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Inaczej niż granice ciągów, sumy szeregów zależą od wszystkich składników.

Stwierdzenie 5.1.1. Dla $m > m'$ szereg $(\sum a_n)_{n \geq m}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $(\sum a_n)_{n \geq m'}$, przy czym

$$\sum_{n=m'}^{\infty} a_n = \sum_{n=m'}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

□

Wniosek 5.1.2. *Jeśli szereg $\sum a$ jest zbieżny, to $\lim_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.* \square

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od „punktu startowego”, w twierdzeniach dotyczących zbieżności możemy (i będziemy) ograniczać się do klasycznego zakresu indeksów $n \in \mathbb{N}$ lub, w szczególnych przypadkach tzw. *szeregów potęgowych*, $n \geq 0$.

Niektóre z poznanych własności granic ciągów mają swoje naturalne konsekwencje dla szeregów.

Stwierdzenie 5.1.3 (Liniowość). *Jeśli szeregi $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne, to dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ szereg $(\sum (\alpha a_n + \beta b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i zachodzi równość*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Teza wynika z oczywistych równości dla sum częściowych

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

oraz z prostych algebraicznych własności granic (tw. 3.4.1(i) i 3.4.5(i)). \square

Stwierdzenie 5.1.4 (Łączność sumy szeregu). *Jeśli szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, to dla dowolnego rosnącego ciągu liczb naturalnych $m = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szereg $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach*

$$b_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k, \quad b_{n+1} = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

jest także zbieżny i zachodzi równość sum $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

W zapisie mniej formalnym suma szeregu $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + \dots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + \dots + a_{m_2}) + \dots + (a_{m_{n-1}+1} + \dots + a_{m_n}) + \dots$$

Dowód. Dla szeregu $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ opisanego poprzez zbieżny ciąg sum częściowych, sumy częściowe szeregu $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{m_n} a_k = s_{m_n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

stanowią podciąg $(s_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ – zbieżny na mocy Twierdzenia 4.3.1(i). \square

Uwaga 5.1.3. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, co widać na przykładzie rozbieżnego szeregu $(\sum (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Oczywiście, z rozbieżności szeregu otrzymanego z $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ po odpowiednim pogrupowaniu składników wynika rozbieżność wyjściowego szeregu.

Przykład 5.1.3. Szereg *anharmoniczny* $(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Istotnie, nierówności

$$\begin{aligned} s_{2n} &< s_{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = s_{2n+2} = s_{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &< s_{2n+1} = s_{2n-1} - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) < s_{2n-1} \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ dowodzą, że sumy częściowe o indeksach parzystych tworzą ciąg rosnący $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ograniczony z góry przez każdy z wyrazów ciągu malejącego $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Z definicji kresu górnego $g = \sup_n s_{2n}$ wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $g - \varepsilon < s_{2n} \leq g$, jeśli tylko $n \geq k$. Zastępując ewentualnie k przez $K = \max\{k, \frac{1}{2\varepsilon}\}$ i korzystając z równości $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, otrzymujemy dla $n \geq K$

$$g - \varepsilon < s_{2n} < s_{2n+1} \leq g + \frac{1}{2n+1} < g + \varepsilon,$$

gdzie $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2K} \leq \varepsilon$. Zatem granica $\lim_n s_n$ istnieje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = g$.

Powtarzając przedstawione wyżej rozumowanie otrzymujemy

Stwierdzenie 5.1.5 (Kryterium Leibniza). *Szereg naprzemienny czyli szereg $(\sum (-1)^{n-1} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, taki że $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny, jeśli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotonicznie zbieżny do liczby 0. W takim przypadku zachodzi nierówność*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie zbieżności szeregu anharmonicznego sprawdzamy, że ciąg *parzystych* sum częściowych $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ jest rosnący, a ciąg sum *nieparzystych* – malejący, przy czym wspólna wartość $g = \sup_k s_{2k} = \inf_k s_{2k-1}$ jest sumą szeregu. Z nierówności $s_{2k} < g < s_{2k+1} < s_{2k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$ wynikają oszacowania błędu

$$0 < s_{2k-1} - g < s_{2k-1} - s_{2k} = a_{2k} \quad \text{i} \quad 0 < g - s_{2k} < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}. \quad \square$$

Uwaga 5.1.4. Zarówno rozbieżność szeregu harmonicznego $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ jak i zbieżność szeregu anharmonicznego $(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ do liczby $\ln(2)$ – por. Wniosek 8.1.5 – oceniane są jako *wolne*. Korzystając z komputera można

sprawdzić, że suma 1 mld = 1000000000 składników każdego z szeregów daje w przybliżeniu liczby

$$\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n} \approx 21,30048150235 \quad \sum_{n=1}^{10^9} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \approx 0,69314718006$$

przy czym pierwsza z sum bardziej przypomina liczbę $\ln(10^9) = 20,7232658\dots$ niż nieskończoność, a druga jest zgodna z $\ln(2) = 0,69314718055\dots$ na zaledwie (aż?) 9-ciu kolejnych cyfrach rozwinięcia dziesiętnego. Wprawdzie dowód kryterium Leibniza korzysta z możliwości łączenia w pary sąsiednich wyrazów szeregu o różnych znakach, co redukuje o połowę liczbę składników i przyspiesza w pewnej mierze obliczenia numeryczne, ale nie poprawia to uzyskanej dokładności.

Dla porównania proponujemy skorzystać z nierówności (3.16) i wskazać liczbę składników wystarczających do wyznaczenia z podobną dokładnością liczby e .

Przykład 5.1.4. Korzystając z łączności (Stwierdzenie 5.1.4) możemy czasami przyspieszyć zbieżność szeregu naprzemiennego. Proponowana *metoda* polega na podziale co drugiego z wyrazów szeregu i rozważeniu szeregu o wyrazach postaci $b_n = \frac{a_{2n-1}}{2} - a_{2n} + \frac{a_{2n+1}}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym oba szeregi są zbieżne i

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \frac{a_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dla szeregu anharmonicznego wyznaczamy

$$b_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)},$$

co daje równość $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$. Dla oceny tempa zbieżności otrzymanego szeregu możemy skorzystać z nierówności

$$b_n = \frac{4n^2 - 1}{(2n-1)^2 2n(2n+1)^2} < \frac{2n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, z której wynikają oszacowania

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \lim_m \sum_{k=n+1}^m b_k \leq \lim_m \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right) = \frac{1}{4(2n+1)^2},$$

oraz

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k < s \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{4(2n+1)^2}. \quad (5.4)$$

Otrzymane w ten sposób oszacowanie liczby s przez skończoną sumę pozwala istotnie ograniczyć liczbę składników. Błąd mniejszy niż $\varepsilon = 10^{-9}$ otrzymujemy już wtedy, gdy $\frac{1}{4(2n+1)^2} < \varepsilon$, a więc dla $n \geq 7906$ (dla oryginalnego szeregu anharmonicznego potrzeba było $n = 10^9$ składników). Okazuje się, że przy okazji dostaliśmy dużo lepsze przybliżenie sumy s i jest nim wyrażenie $B_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{4(2n+1)^2}$ stojące po prawej stronie nierówności (5.4). Istotnie, nierówności

$$b_n = \frac{1}{2n(4n^2 - 1)} > \frac{1}{8n^3} > \frac{1}{16} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ prowadzą do oszacowania $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \geq \frac{1}{16(n+1)(n+2)}$, co w połączeniu z (5.4) daje

$$B_n - s \leq \frac{1}{4(2n+1)^2} - \frac{1}{16(n+1)(n+2)} = \frac{8n+7}{16(2n+1)^2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2(2n+1)^2(n+2)} < \frac{1}{8n^3}.$$

Wynikające stąd oszacowanie błędu przybliżenia $s \approx B_n$,

$$0 \leq \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{4(2n+1)^2} \right) - s < \frac{1}{8n^3}, \quad (5.5)$$

pozwała uzyskać błąd $|B_n - s| < \varepsilon$ dla $n \geq 500$ składników.

O tym, że błąd otrzymanego przybliżenia jest jeszcze mniejszy, można się przekonać, rozważając szereg o wyrazach $c_n = \frac{a_{2n}}{2} - a_{2n+1} + \frac{a_{2n+2}}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym oba szeregi są zbieżne i

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Dla szeregu anharmonicznego mamy

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n+1}{4n(n+1)(4n^2+4n+1)} < \frac{2n+1}{16n^2(n+1)^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right), \end{aligned}$$

co prowadzi do oszacowania

$$s \geq C_n := \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^n c_k - \frac{1}{16(n+1)^2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad (5.6)$$

a więc $C_n \leq s \leq B_n$, gdzie

$$\begin{aligned} B_n - C_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{4(2n+1)^2} \\ &\quad - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{16(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{16(n+1)^2(2n+1)^2} < \frac{1}{64n^4}. \end{aligned}$$

Każde z wyrażeń B_n i C_n przybliża zatem sumę s szeregu anharmonicznego z dokładnością $\varepsilon = 10^{-9}$, jeśli tylko $64n^4 \geq 10^9$, tzn. dla $n \geq 63$. Łatwy do policzenia środek $A_n = \frac{1}{2}(B_n + C_n)$ przedziału $[C_n, B_n]$ przybliża sumę s z co najmniej dwukrotnie mniejszym błędem. Zatem $|A_n - s| < \frac{1}{128n^4}$, co jest wielkością mniejszą niż ε dla $n \geq 53$. Obliczenia numeryczne wykonane dla

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{4(2n+1)^2} \left(1 - \frac{1}{8(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^n c_k - \frac{1}{16(n+1)^2} \left(1 - \frac{1}{2(2n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

pokazują, że faktyczny błąd $|A_n - \ln(2)|$ dla $n = 53$ wynosi ok. $1,74 \cdot 10^{-11}$, a jest mniejszy od $\varepsilon = 10^{-9}$ już dla $n \geq 24$.

5.2 Kryteria zbieżności

Podstawowy zestaw kryteriów zbieżności szeregów zawiera

Twierdzenie 5.2.1. *Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym.*

- (i) Warunek konieczny: *Jeśli szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, to $\lim_n a_n = 0$.*
- (ii) Warunek Cauchy'ego: *Szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje indeks m taki, że*

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n \geq m.$$

- (iii) Zbieżność bezwzględna: *Jeśli szereg $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*
- (iv) Ograniczoność: *Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne, to szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Dowód. (i) Ponieważ sumy częściowe $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$, wiąże zależność $a_n = s_n - s_{n-1}$ dla $n > 1$, ze zbieżności szeregu wynika istnienie granicy

$$\lim_n a_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = 0.$$

Zgodnie z Twierdzeniem 4.4.1 zastosowanym do ciągu sum częściowych $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$, warunkiem równoważnym zbieżności szeregu jest to, by dla każdego $\varepsilon > 0$ istniała liczba – nazwijmy ją m' – taka,

że $|s_n - s_{m'}| < \varepsilon$, jeśli tylko $n > m'$. Dla zakończenia dowodu własności (ii) przyjmujemy $m = m' + 1$, co daje równoważny warunek, w którym $s_n - s_{m'} = \sum_{k=m}^n a_k$.

Opisane w warunku Cauchy'ego sumy spełniają nierówność

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|,$$

z której wnioskujemy własność (iii) mówiącą, że zbieżność szeregu $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynika ze zbieżności szeregu wartości bezwzględnych.

Kryterium ograniczoności (iv) dla szeregów o wyrazach nieujemnych jest prostym wnioskiem z Twierdzenia 3.2.4 o zbieżności ciągów monotonicznych. \square

Mimo swej prostoty, kryterium ograniczoności pozwala na uzyskanie ważnych, niebanalnych wyników, o czym świadczy

Stwierdzenie 5.2.2. Szereg harmoniczny stopnia $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum \frac{1}{n^a} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

jest zbieżny dla $a > 1$ i rozbieżny do ∞ , gdy $a \leq 1$.

Dowód. Niech s oznacza ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla $a > 1$ podciąg $(s_{2^n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, co wynika z nierówności

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \right) + \left(\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{7^a} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^a} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^a} \right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^a} \right) + \left(\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{4^a} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^a} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^a} \right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^a} + \frac{4}{4^a} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^a} < \frac{1}{1-2^{1-a}} < \infty, \end{aligned}$$

dla $a > 1$. Stąd – ograniczoność szeregu (por. ćw. 4.3.1).

W przypadku $a \leq 1$ ma miejsce oszacowanie z dołu

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

co dowodzi nieograniczoności badanego szeregu. \square

Szeregi, których zbieżność wynika z kryterium zbieżności bezwzględnej (iii), zasługują, jak się niebawem przekonamy, na szczególną uwagę i wyróżnienie. Stąd

Definicja 5.2.1. Szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeśli szereg wartości bezwzględnych $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest warunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny, ale nie – bezwzględnie zbieżny.

Z połączenia kryteriów (iii)–(iv) z Twierdzenia 5.2.1 otrzymujemy

Wniosek 5.2.3. Szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bezwzględnie zbieżny \iff szereg $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. \square

Wniosek 5.2.4 (Kryterium porównawcze). Jeśli wyrazy ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają warunek

$$0 \leq |a_n| \leq b_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N},$$

to szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bezwzględnie zbieżny, o ile szereg $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. \square

Przykład 5.2.1. Szereg $(\sum \frac{x^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny dla każdej liczby x z przedziału $[-1, 1)$, a rozbieżny, gdy $x = 1$ lub $|x| > 1$. Istotnie, zbieżność dla $|x| < 1$ wynika z kryterium porównawczego i nierówności

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

natomiast przypadki $x = 1$ (szereg harmoniczny – rozbieżny) i $x = -1$ (szereg anharmoniczny – zbieżny) zostały już wyżej zbadane.

W przypadku, gdy $|x| > 1$, możemy skorzystać z Wniosku 1.2.4, co daje $|x|^n \geq 1 + n(|x| - 1)$, a więc

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \geq |x| - 1 > 0.$$

Badany szereg nie spełnia zatem warunku koniecznego zbieżności.

Przedstawione w przykładzie rozumowanie dla $|x| < 1$ ma zastosowanie dla dowolnych szeregów o wyrazach ograniczonych, a więc niekoniecznie zbieżnych. Stąd koncepcje bardziej szczegółowych kryteriów porównawczych.

Twierdzenie 5.2.5 (Kryterium d'Alemberta). Szereg liczbowy o wyrazach niezerowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny bezwzględnie, jeśli granica górna ciągu ilorazów wyrazów sąsiadnych spełnia nierówność

$$\limsup_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \quad (5.7)$$

tn. jeśli istnieje indeks $k \in \mathbb{N}$ i liczba dodatnia $r < 1$ taka, że

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r \quad \text{dla wszystkich } n \geq k. \quad (5.8)$$

Jeśli natomiast istnieje $r > 1$ takie, że $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq r$ dla wszystkich $n \geq k$, czyli

$$\liminf_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1, \quad (5.9)$$

to szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

Wniosek 5.2.6. Jeśli w kryterium d'Alemberta istnieje granica (skończona lub niewłaściwa) $g = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, to szereg jest zbieżny bezwzględnie, gdy $g < 1$, a rozbieżny w przypadku, gdy $g > 1$. \square

Łącząc kryterium d'Alemberta z warunkiem koniecznym zbieżności otrzymujemy także

Wniosek 5.2.7. Jeśli $\limsup_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, to $\lim_n a_n = 0$. \square

Dowód Twierdzenia 5.2.5. Twierdzenie podaje warunek dostateczny bezwzględnej zbieżności badanego szeregu – w dwu równoważnych sformułowaniach odwołujących się bezpośrednio do definicji granicy górnej. Równoważność wynika zatem np. z Wniosku 4.1.2. Załóżmy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek (5.8). Zachodzi wówczas nierówność $|a_{k+1}| \leq r|a_k|$, a zatem także $|a_{k+2}| \leq r|a_{k+1}| \leq r^2|a_k|$ i ogólnie

$$|a_{n+k}| \leq r^n |a_k| \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

co sprawdzamy korzystając z zasady indukcji. Otrzymana nierówność

$$|a_n| \leq r^n \frac{|a_k|}{r^k} \quad \text{dla } n \geq k$$

oznacza, że badany szereg spełnia kryterium porównawcze – względem szeregu geometrycznego o ilorazie r – a więc jest zbieżny.

Nierówność (5.9) implikuje rozbieżność szeregu, który w tym przypadku nie spełnia koniecznego kryterium zbieżności: $|a_{n+k}| \geq r^n |a_k| > |a_k|$ dla $n \geq k$. \square

Udowodnione w poprzednim podrozdziale, dość oczywiste kryterium Leibniza dla szeregów naprzemiennych doczekało się kilku istotnych uogólnień, których wspólną cechą jest to, że dotyczą szeregów niekoniecznie bezwzględnie zbieżnych, a ich wspólną podstawą jest

Lemat 5.2.8 (Przekształcenie Abela). *Dla dowolnych dwu ciągów liczbowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz liczb naturalnych $m \leq n$ zachodzi równość*

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) b_n + \left(\sum_{k=m}^{n-1} a_k \right) (b_{n-1} - b_n) + \left(\sum_{k=m}^{n-2} a_k \right) (b_{n-2} - b_{n-1}) + \dots \\ &\quad + \left(\sum_{k=m}^{m+1} a_k \right) (b_{m+1} - b_{m+2}) + a_m (b_m - b_{m+1}) \end{aligned}$$

oraz nierówność

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq A_m (|b_n| + |b_{n-1} - b_n| + |b_{n-2} - b_{n-1}| + \dots + |b_m - b_{m+1}|), \quad (5.10)$$

gdzie $A_m = \sup \left\{ \left| \sum_{k=m}^{m'} a_k \right|; m' \geq m \right\}$. \square

Twierdzenie 5.2.9 (Kryterium Dirichleta). *Szereg $(\sum a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, jeśli szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotonicznie zbieżny do 0.*

Dowód. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, co pociąga za sobą nierówność $b_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli istnieje liczba $C > 0$ taka, że $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq C$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to z ograniczenia

$$\left| \sum_{k=m}^{m'} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m'} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \right| \leq 2C \quad \text{dla dowolnych } m' \geq m$$

i nierówności Abela (5.10) otrzymujemy

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2C (b_n + (b_{n-1} - b_n) + \dots + (b_m - b_{m+1})) = 2C \cdot b_m.$$

dla $n \geq m$. Zgodnie z Twierdzeniem 5.2.1(ii) szereg iloczynów jest zbieżny. \square

Ćwiczenie 5.2.1. Sprawdzić, że założenie monotonicznej zbieżności ciągu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ można osłabić, jeśli oprócz zbieżności $\lim_n b_n = 0$ założyć także zbieżność szeregu $(\sum |b_n - b_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Przykład 5.2.2. Szereg $(\sum \frac{\sin(n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ przypomina szereg anharmoniczny, jest jednak bardziej nieregularny. Aby skorzystać z kryterium Dirichleta zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\cos(n \pm \frac{1}{2}) = \cos(n) \cos(\frac{1}{2}) \mp \sin(n) \sin(\frac{1}{2}),$$

a zatem $\cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2}) = 2 \sin(n) \sin(\frac{1}{2})$. Wynika stąd ograniczoność

$$|\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2})} \left| \cos(\frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2}) \right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})}$$

szeregu $(\sum \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ i zbieżność szeregu $(\sum \frac{\sin(n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Jest to szereg zbieżny warunkowo, co wynika z elementarnej obserwacji, że w każdej trójce liczb postaci $|\sin(3k - 2)|$, $|\sin(3k - 1)|$ i $|\sin(3k)|$, $k \in \mathbb{N}$, przynajmniej jedna przekracza $\frac{1}{2}$. Istotnie, zbiór Z rozwiązań nierówności $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}$ jest sumą przedziałów postaci $[-\frac{\pi}{6} + m\pi, \frac{\pi}{6} + m\pi]$ dla $m \in \mathbb{Z}$. Ponieważ każdy z przedziałów ma długość $\frac{\pi}{3} \approx 1,05 < 2$, zawiera co najwyżej dwie spośród liczb $3k - 2, 3k - 1, 3k$ dla danego $k \in \mathbb{N}$. Pozostałe liczby z rozważanej trójki (przynajmniej jedna) nie mogą należeć do Z , gdyż kolejny przedział, dla $m - 1$ lub $m + 1$, jest odległy od m -go o $\frac{2\pi}{3} > 2$. Szereg wartości bezwzględnych spełnia zatem nierówności

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{|\sin(k)|}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{|\sin(3k - 2)|}{3k - 2} + \frac{|\sin(3k - 1)|}{3k - 1} + \frac{|\sin(3k)|}{3k} \right) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3k}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ – i jest nieograniczony.

Ćwiczenie 5.2.2. Sporządzić (z pomocą np. Maximy lub Maple) wykres funkcji $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ dla $x \in (-1, 7)$. Porównać z wykresami sum częściowych $n = 3, 6, 10$ składników.

5.3 Rozwinięcie e^x w szereg

Bezsprzecznie za najważniejszy w *Analizie* uważa się szereg liczbowy zależny od parametru $x \in \mathbb{R}$ i nazywany *rozwinięciem* funkcji wykładniczej o podstawie e .

Twierdzenie 5.3.1. Dla każdej liczby rzeczywistej x szereg $(\sum \frac{x^n}{n!})_{n \geq 0}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Dowód. Zgodnie z kryterium d'Alemberta, równość

$$\lim_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0 \quad \text{dla } x \neq 0,$$

potwierdza zbieżność badanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Ustalmy dowolne $x \geq 0$. Dla dowodu zbieżności szeregu $(\sum \frac{x^n}{n!})_{n \geq 0}$ do $e^x = \lim_n (1 + \frac{x}{n})^n$ skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona (1.2) i analogicznej do (3.12) tożsamości

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{x^n}{n!},$$

w której wszystkie składniki są nieujemne. Stąd, dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$,

$$1 + x + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \frac{x^m}{m!} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

jeśli tylko $n \geq m$. Wszystkie trzy porównywane ciągi są zbieżne, a więc przechodząc do granicy względem n i korzystając z monotoniczności granic (Stwierdzenie 3.4.2), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Dla niemalejącego ciągu sum częściowych oznacza to równość (5.11).

Wzmacniając założenie do $x > 0$, wykażemy teraz zbieżność szeregu o wyrazach $\frac{(-x)^n}{n!}$ do liczby $e^{-x} = \lim_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Dowód opiera się na innych oszacowaniach, gdyż ciąg sum częściowych nie jest w tym przypadku monotoniczny. Dla dowolnej ustalonej liczby $m \in \mathbb{N}$ oraz dla $n \geq 2m+1$ oznaczmy przez s_n^m sumę

$$\begin{aligned} s_n^m = & (1-x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x}{3}\right) + \dots \\ & + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2m-1}{n}\right) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \left(1 - \left(1 - \frac{2m}{n}\right) \frac{x}{2m+1}\right) \end{aligned}$$

grupującą w pary sąsiednie składniki wielomianu $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ do stopnia $2m+1$ włącznie. Ponieważ pozostałe składniki – analogicznie pogrupowane – są nieujemne, o ile $x \leq 2m+1 \leq n$, ustalamy odpowiednio duże $m \in \mathbb{N}$, co daje nierówność $s_n^m \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ prawdziwą dla wszystkich $n \geq 2m+1$. Porównując granice obu ciągów, otrzymujemy zatem

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \lim_n s_n^m \leq e^{-x}, \quad \text{jeśli } 2m+1 \geq x. \quad (5.12)$$

Oszacowanie wielkości e^{-x} z góry otrzymamy, wychodząc od wykorzystanego wyżej wzoru dwumianowego Newtona dla wielomian $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, przy czym tym razem grupujemy w pary składniki zawierające $-x^{2k-1}$ i x^{2k} , $2k \leq n$.

Przy ustalonym założeniu $n \geq 2m+1 \geq x$, suma składników do stopnia $2m$ włącznie wynosi

$$S_n^m = 1 - x \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} \left(1 - \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{x}{4}\right) - \dots \\ - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2m-2}{n}\right) \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \left(1 - \left(1 - \frac{2m-1}{n}\right) \frac{x}{2m}\right)$$

przy czym pozostałe składniki są dodatnie. Z nierówności $(1 - \frac{x}{n})^n \leq S_n^m$ prawdziwej dla wszystkich $n \geq 2m+1$ wynika nierówność dla granic względem n ,

$$e^{-x} \leq \lim_n S_n^m = \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-x)^k}{k!}, \quad \text{jeśli } 2m+1 \geq x. \quad (5.13)$$

Ponieważ wykazaliśmy wcześniej zbieżność szeregu, oba podciągi – złożone z sum częściowych parzystej bądź nieparzystej liczby składników – są zbieżne do tej samej granicy. Z nierówności (5.12)–(5.13) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \leq e^{-x} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!},$$

co oznacza równość i kończy dowód. \square

5.4 Szeregi potęgowe

Sygnalizowana w kryterium d'Alemberta (tw. 5.2.5) efektywność porównywania badanego szeregu z szeregiem geometrycznym pozwala na wyróżnienie ważnej klasy szeregów zależnych od parametru.

Definicja 5.4.1. Dla dowolnego ciągu liczbowego $a = (a_n)_{n \geq 0}$ i dowolnej liczby rzeczywistej x szereg $\sum a(x) = (\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$ nazywamy szeregiem potęgowym zmiennej $x \in \mathbb{R}$ o współczynnikach a .

W przypadku zbadanego wyżej szeregu potęgowego zbieżnego do e^x , główny ciężar dowodu dotyczył wyznaczenia sumy szeregu, natomiast zbieżność była prostą konsekwencją jednego z kryteriów. Kwestię zbieżności dowolnego szeregu potęgowego precyzuje

Twierdzenie 5.4.1 (O zbieżności szeregu potęgowego). Dla dowolnego szeregu potęgowego $\sum a(x)$ o współczynnikach tworzących ciąg liczbowy $(a_n)_{n \geq 0}$, zachodzi dokładnie jeden z przypadków:

- (i) Szereg $(\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$ jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- (ii) Istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że rozważany szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in (-\rho, \rho)$ i rozbieżny, gdy $|x| > \rho$.
- (iii) Szereg jest rozbieżny dla wszystkich $x \neq 0$.

Zbiór $Z(a) = \{x \in \mathbb{R}; \text{szereg } \sum a(x) \text{ jest zbieżny}\}$ stanowi przedział.

Dla dowodu wykorzystamy następujący

Lemat 5.4.2. *Jeśli szereg $\sum a(x)$ jest zbieżny dla pewnego $c \neq 0$, to jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich x z przedziału $(-|c|, |c|)$.*

Dowód. Z założenia zbieżności szeregu $(\sum a_n c^n)_{n \geq 0}$ wynika zbieżność do 0, a więc także ograniczoność wyrazów ciągu. Istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że $|a_n c^n| \leq M$, dla wszystkich $n \geq 0$. Dla dowolnej liczby x spełniającej warunek $|x| < |c|$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \cdot \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq M q^n,$$

gdzie $q = \left| \frac{x}{c} \right| < 1$. Zbieżność szeregu wynika z kryterium porównawczego. \square

Dowód Twierdzenia 5.4.1. Odrzucając przypadek (iii), możemy założyć, że istnieją liczby $c \neq 0$, dla której szereg $\sum a(c)$ jest zbieżny, a więc $Z(a) \neq \{0\}$. Jeśli zbiór $Z(a)$ jest ograniczony, to kres górny

$$\rho = \sup \{ |c|; \text{szereg } (\sum a_n c^n)_{n \geq 0} \text{ jest zbieżny} \}$$

spełnia warunek opisany jako przypadek (ii). Istotnie – dla dowolnej liczby x takiej, że $|x| < \rho$, w przedziale $(|x|, \rho)$ istnieje liczba $|c|$ dla pewnego $c \in Z(a)$, a z Lematu 5.4.2 wynika zbieżność szeregu $\sum a(x)$. Jeśli zbiór $Z(a)$ jest nieograniczony, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $c \in Z(a)$ taka, że $|c| > |x|$. Zgodnie z udowodnionym lematem oznacza to zbieżność szeregu $\sum a(x)$. Wykazaliśmy tym samym, że zbiór $Z(a)$ jest przedziałem o końcach $\pm \rho$. Nie znamy odpowiedzi na pytanie o ewentualną zbieżność w punktach $x = \rho, -\rho$. \square

Definicja 5.4.2. *Dla szeregu potęgowego $\sum a(x)$ o dowolnych współczynnikach tworzących ciąg liczbowy $a = (a_n)_{n \geq 0}$, wielkość $\rho = \rho(a) \geq 0$ (liczbę lub symbol $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$) nazywamy promieniem zbieżności szeregu., jeśli szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in (-\rho, \rho)$, a rozbieżny – dla x poza domkniętym przedziałem o końcach $-\rho$ i ρ . Przedział $Z(a)$ nazywamy przedziałem zbieżności szeregu.*

Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum a(x)$ jest równy ∞ , gdy szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wartość $\rho = 0$ charakteryzuje szeregi rozbieżne dla każdego $x \neq 0$. W sprzyjających warunkach (jakich?) wielkość $\rho(a)$ można wyznaczyć w oparciu o kryterium d'Alemberta. Bardziej efektywne choć trudniejsze obliczeniowo narzędzie udostępnia

Twierdzenie 5.4.3 (Kryterium zbieżności Cauchy'ego). *Dla dowolnego szeregu liczbowego $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niech r oznacza wielkość $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas*

- (i) *szereg jest bezwzględnie zbieżny, jeśli $r < 1$, natomiast*
- (ii) *szereg jest rozbieżny, gdy $r > 1$.*

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 4.1.2, z nierówności $r < 1$ wynika, że jeśli za R wziąć dowolną ustaloną liczbę z przedziału $(r, 1)$, to dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} < R < 1$. Istnieje zatem indeks $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$|a_n| \leq R^n \quad \text{dla } n \geq k$$

i zbieżność szeregu wynika natychmiast z kryterium porównawczego.

Jeśli $r > 1$, to z cytowanego wyżej wniosku wynika, zgodnie z definicją granicy górnej, że zbiór indeksów $\{n \in \mathbb{N}; \sqrt[n]{|a_n|} > 1\}$ jest nieskończony, a ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie może być zbieżny do liczby 0. \square

Wniosek 5.4.4 (Promień zbieżności). *Wielkość $r = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ jednoznacznie określa promień zbieżności ρ szeregu potęgowego $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ wg reguły*

- (i) $\rho = \infty$, *gdy $r = 0$,*
- (ii) $\rho = \frac{1}{r}$, *gdy $0 < r < \infty$, oraz*
- (iii) $\rho = 0$, *gdy $r = \infty$.*

Jeśli ilorazy $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ są poprawnie określone dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i tworzą ciąg zbieżny, to jego granica jest równa r .

Dowód. Równość $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = r|x|$ implikuje zbieżność lub rozbieżność szeregu potęgowego, zależnie od tego, czy $r|x| < 1$, czy też $r|x| > 1$. Własność ta jednoznacznie wiąże wartość promienia zbieżności ρ z odwrotnością $\frac{1}{r}$, w sposób opisany w punktach (i)–(iii). Jeśli istnieje granica ciągu ilorazów $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r' \in \mathbb{R}$, to z kryterium d'Alemberta wynika, że liczba $\frac{1}{r'}$ (lub ∞) jest promieniem zbieżności ρ szeregu. Równość $r = r'$ wynika w tym przypadku z jednoznaczności wielkości ρ . \square

Przykład 5.4.1. Promień zbieżności szeregu potęgowego $(\sum \frac{n^n x^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ jest równy $\rho = \frac{1}{e}$. Wielkość tę łatwiej wyznaczyć korzystając z kryterium d'Alemberta, z granicy

$$\lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_n \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Zgodnie z Wnioskiem 5.4.4, wynika stąd równość $\limsup \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Bardziej precyzyjny opis zachowania szeregu na krańcach przedziału zbieżności, a więc dla $x = \pm \frac{1}{e}$, wymaga skorzystania z wyprowadzonego w podrozdziale 8.3 wzoru *Stirlinga* (10.46), z którego wynika warunkowa zbieżność w lewym i rozbieżność w prawym końcu przedziału $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

5.5 Co jeszcze wynika z bezwzględnej zbieżności?

W skrócie, odpowiedź brzmi: przemienność sumy szeregu i możliwość mnożenia dwu szeregów wyraz po wyrazie. A teraz szczegóły...

Na początek pomocnicza własność, przydatna także dla badania szeregów zbieżnych warunkowo.

Lemat 5.5.1. *Dowolny szereg liczbowy $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny są szeregi $(\sum a_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\sum a_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie*

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \quad i \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad (5.14)$$

czyli $a_n = a_n^+$ dla wyrazów nieujemnych, zaś $a_n = -a_n^-$ dla wyrazów niedodatnich.

Dowód. Jeśli szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bezwzględnie zbieżny, to każdy z badanych szeregów jest ograniczony przez sumę $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, a więc zbieżny. Z kolei z założenia, że oba szeregi są zbieżne (i Stwierdzenia 5.1.3) wynika zbieżność szeregu o wyrazach $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ dla $n \in \mathbb{N}$. \square

Definicja 5.5.1. *Ciąg liczb naturalnych $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy permutacją zbioru liczb naturalnych \mathbb{N} , jeśli każda liczba naturalna występuje w ciągu dokładnie 1 raz.*

Twierdzenie 5.5.2 (Przemienność). *Jeśli szereg $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bezwzględnie zbieżny, to dla każdej permutacji $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbioru \mathbb{N} szereg $(\sum a_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest również bezwzględnie zbieżny i zachodzi równość sum*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}.$$

Zwracamy uwagę czytelnika na fakt, iż odpowiadające obu szeregom ciągi sum częściowych są zdecydowanie różne.

Dowód. Załóżmy na początek, że wszystkie wyrazy badanego ciągu są nieujemne. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ przyjmijmy $R_n = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Ponieważ składniki są nieujemne, z inkluzji $\{r_1, \dots, r_n\} \subset \{1, 2, \dots, R_n\}$ wynika nierówność

$$\sum_{i=1}^n a_{r_i} \leq \sum_{k=1}^{R_n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Oznacza to ograniczoność, a więc także zbieżność szeregu poddanego permutacji – i prowadzi do nierówności

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{r_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Aby uzyskać nierówność przeciwną (i równość sum) wystarczy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ przyjąć $L_n = \max\{i \in \mathbb{N}; r_i \leq n\}$. Implikacja

$$\{1, \dots, n\} \subset \{r_1, \dots, r_{L_n}\} \implies \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{i=1}^{L_n} a_{r_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{r_i}$$

dowodzi równości sum obu szeregów.

W ogólnym przypadku szeregu bezwzględnie zbieżnego $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ możemy udowodnioną już przemienność zastosować do szeregów $(\sum a_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\sum a_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$. Dla dowolnej ustalonej permutacji r zbioru \mathbb{N} mamy zatem równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \square$$

Uwaga 5.5.1. Udowodniona wyżej niezależność sumy szeregu od kolejności wyrazów nie zachodzi dla szeregów warunkowo zbieżnych. W szczególności, zmieniając kolejność wyrazów szeregu Leibniza $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ można uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do dowolnej, z góry danej liczby rzeczywistej.

Twierdzenie 5.5.3 (Iloczyn szeregów). *Jeśli $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są dowolnymi szeregami bezwzględnie zbieżnymi, to szereg, którego wyrazami są iloczyny $a_i b_j$ dla $i, j \in \mathbb{N}$, ustawione w dowolnej kolejności, jest bezwzględnie zbieżny do sumy równej $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

W ramach kursu *Podstaw Logiki i Teorii Mnogości* dowiadujemy się, że produkt kartezjański $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, czyli zbiór wszystkich par (i, j) , takich, że $i, j \in \mathbb{N}$, jest przeliczalny.

Dowód. Dla danych szeregów bezwzględnie zbieżnych $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wybieramy ustawienie iloczynów $a_i b_j$ w ciąg $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, taki sposób, by dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wyrazy d_1, \dots, d_{n^2} obejmowały wszystkie iloczyny postaci $a_i b_j$ dla $i, j \leq n$. Wystarczy zacząć od $d_1 = a_1 b_1$ dla $n = 1$ i, korzystając z zasady indukcji, jako kolejne $2n + 1$ wyrazów od d_{n^2+1} do $d_{(n+1)^2}$ przyjąć dowolnie uporządkowane iloczyny

$$a_1 b_{n+1}, \dots, a_n b_{n+1}, a_{n+1} b_{n+1}, a_{n+1} b_n, \dots, a_{n+1} b_1.$$

Bezwzględna zbieżność szeregu $(\sum d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynika z ograniczoności

$$\sum_{k=1}^n |d_k| \leq \sum_{k=1}^{n^2} |d_k| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i b_j| = \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot \sum_{j=1}^n |b_j| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Skoro szereg jest zbieżny, do wyznaczenia jego sumy wystarczy dowolny podciąg sum częściowych, np.

$$\sum_{k=1}^{n^2} d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j \quad \text{dla } n \rightarrow \infty,$$

gdzie granica ciągu iloczynów jest równa iloczynowi granic. Fakt, iż zbieżność szeregu i jego suma nie zależą od kolejności składników, wynika z poprzedniego twierdzenia. \square

Przemienność składników szeregu bezwzględnie zbieżnego została sformułowana i udowodniona dla ciągów o indeksach naturalnych, ale jest oczywiście prawdziwa dla ogólniejszych szeregów postaci $(\sum a_n)_{n \geq m}$, gdy $m \geq 0$. W przypadku zdefiniowanego niżej *iloczynu szeregów* celowo rozważamy ciągi, w których zbiór indeksów zawiera liczbę 0. Konwencja ta ułatwia zapis i ma silny związek z formalną operacją mnożenia szeregów potęgowych, od której oczekujemy, by

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_3 + \dots + a_3 b_0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Definicja 5.5.2. Iloczynem Cauchy'ego szeregów $(\sum a_n)_{n \geq 0}$ i $(\sum b_n)_{n \geq 0}$ nazywamy szereg $(\sum c_n)_{n \geq 0}$, w którym

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Wykorzystując odmienny niż w Twierdzeniu 5.5.3 porządek wyrazów (jaki?) i korzystając z łączności (Stwierdzenie 5.1.4) otrzymujemy

Wniosek 5.5.4. *Iloczyn Cauchy’ego szeregów zbieżnych bezwzględnie jest bezwzględnie zbieżny, a jego suma jest iloczynem sum poszczególnych szeregów.* \square

Uwaga 5.5.2. Można wykazać (F. Martens), że do zbieżności iloczynu Cauchy’ego wystarczy, by jeden z szeregów był bezwzględnie zbieżny – a drugi zbieżny. Również w takiej sytuacji suma otrzymanego szeregu jest iloczynem poszczególnych sum.

Ćwiczenie 5.5.1. Wyznaczyć (tzn. obliczyć) iloczyn Cauchy’ego szeregów stanowiących rozwinięcie potęg e^x oraz e^y dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozdział 6

Funkcje z elementarza

W bieżącym podrozdziale dokończymy proces konstruowania tzw. *funkcji elementarnych*, oraz wykażemy między innymi, że funkcje elementarne są *ciągłe* – i zobaczymy, co z tego wynika.

6.1 Oznaczenia i terminologia

Definicja 6.1.1. Funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej nazywamy każdą funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, określoną na dowolnym podzbiorze $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja f jest różnowartościowa, jeśli $f(x) \neq f(x')$ dla dowolnych różnych liczb $x, x' \in X$.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, natomiast zbiór

$$f[X] = \{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\} \quad (6.1)$$

jest obrazem funkcji f . Funkcję f nazywamy ograniczoną, jeśli jej obraz jest zbiorem ograniczonym. Liczby

$$\inf f := \inf f[X] \quad i \quad \sup f := \sup f[X]$$

nazywamy, odpowiednio, kresem dolnym i kresem górnym funkcji f .

W ramach bieżącego kursu będziemy się posługiwać skróconą nazwą *funkcja zmiennej rzeczywistej*. Przyjmujemy także, że zapis

$$f: X \rightarrow Y, \quad \text{gdzie } Y \subset \mathbb{R},$$

oznacza dowolną funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, której wartości mieszczą się w ustalonym zbiorze Y , czyli taką, że $f[X] \subset Y$.

Definicja 6.1.2. Funkcją tożsamościową lub identycznością na podzbiorze $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $\text{id}_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\text{id}_X(x) = x$ dla wszystkich $x \in X$.

Wykonywanie opisanych niżej formalnych operacji na funkcjach może w efekcie doprowadzić do funkcji, której dziedziną jest zbiorem pustym. Dla wygody przyjmujemy, że zapis $g: \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza poprawnie określoną funkcję pustą $g = \emptyset$.

Uwaga 6.1.1. Zgodnie z kursem *Podstaw Logiki i Teorii Mnogości*, funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest formalnie *relacją*, czyli zbiorem par $f = \{(x, f(x)); x \in X\}$ w \mathbb{R}^2 spełniającym określone, niezbyt skomplikowane warunki (jakie?). Ma to tę zaletę, że pozwala na jednoznaczne ustalenie dziedziny funkcji w taki sposób, że równość $f = g$ dwu funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: X' \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza równość dziedzin $X = X'$ oraz te same wartości $f(x) = g(x)$ dla wszystkich x ze wspólnej dziedziny. Zachowując koncepcję równości funkcji, w dalszym ciągu kursu nie będziemy szerzej korzystać z możliwości utożsamienia funkcji ze zbiorem par.

W dość często spotykanej sytuacji, gdy rozważana funkcja nie ma nazwy własnej (takiej, jak np. *sinus*, czyli \sin), a dostępny jest wzór opisujący jej wartości, dopiero wskazanie dziedziny *tworzy funkcję*. W tym sensie zapis symboliczny $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy uważać za równoważny z opisem postaci: $f(x)$ dla $x \in X$, lub np. $f(a)$ dla $a \in X$, jeśli tylko symbol użyty do oznaczenia zmiennej (w tym przypadku x lub a) nie ma w aktualnym kontekście odrębnego, ustalonego wcześniej znaczenia. Alternatywnym, szeroko stosowanym sposobem deklaratowania (definiowania) funkcji jest także zapis postaci

$$X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R},$$

zawierający z reguły wzór opisujący wartości $f(x)$ definiowanej funkcji.

Przykład 6.1.1. Sam wzór $x^2 - 3\sin(x) + 2$ nie jest funkcją, natomiast pozwala na zdefiniowanie wielu funkcji, np. $x^2 - 3\sin(x) + 2$ dla $x \in (-2, 3]$. Równość $g(x) = x^2 - 3\sin(x) + 2$, dla $x \in (-2, 3]$, definiuje funkcję $g: (-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ (i nadaje jej nazwę) lub jest fragmentem definicji funkcji g o dziedzinie zawierającej wskazany przedział.

Definicja 6.1.3. Obcięciem (lub ograniczeniem) funkcji zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ do dowolnego (niepustego) podzbioru $X' \subset X$ nazywamy funkcję $f|_{X'}: X' \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f|_{X'}(x) = f(x)$ dla $x \in X'$. Obraz funkcji $f|_{X'}$ nazywamy obrazem zbioru X' względem funkcji f i oznaczamy $f[X']$.

Obcięcie identyczności id_X do zbioru $X' \subset X$ jest identycznością $\text{id}_{X'}$.

Definicja 6.1.4. Dla dowolnego zbioru $Y \subset \mathbb{R}$ przeciwobrazem Y względem funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$f^{-1}Y = \{x \in X; f(x) \in Y\}. \quad (6.2)$$

Złożeniem lub superpozycją funkcji f z funkcją $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej $g \circ f: f^{-1}Y \rightarrow \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (6.3)$$

dla $x \in X$ takich, że $f(x) \in Y$. Funkcję g nazywamy odwrotną do f , jeśli $Y = f[X]$, a złożenie $g \circ f = \text{id}_X$ jest identycznością.

Podkreślamy, że funkcja $g \circ f$ jest złożeniem funkcji f z funkcją g , w takiej właśnie kolejności. Funkcję odwrotną do f , jeśli istnieje, oznaczamy symbolem $f^{-1}: f[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.1.1 (O funkcji odwrotnej). Funkcja zmiennej rzeczywistej f jest odwracalna (tzn. posiada funkcję odwrotną) wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa. Dla dowolnej różnowartościowej funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

(i) funkcję odwrotną f^{-1} jednoznacznie charakteryzuje relacja

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \quad \text{dla } x \in X \text{ i } y \in f[X];$$

(ii) zachodzi równość $f \circ f^{-1} = \text{id}_{f[X]}$, a zatem f jest także funkcją odwrotną do f^{-1} , tzn. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Dowód. Równość $g \circ f = \text{id}_X$ dla pewnej funkcji $g: f[X] \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza, że $g(f(x)) = x$ dla $x \in X$. Dla dowolnych $x, x' \in X$, z równości $f(x) = f(x')$ wynika zatem równość argumentów, a to oznacza różnowartościowość funkcji f jako warunek konieczny odwracalności. Przy założeniu, że f jest funkcją różnowartościową, każdy element $y \in f[X]$ można w dokładnie jeden sposób przedstawić w postaci $y = f(x)$ dla $x \in X$, a zatem wzór

$$g(y) = x \quad \text{dla } y = f(x) \in f[X] \quad (6.4)$$

jest poprawną definicją funkcji $g: f[X] \rightarrow \mathbb{R}$, odwrotnej do f . Jest to także potwierdzenie równoważności sformułowanej w punkcie (i). Z (6.4) wynika różnowartościowość funkcji g , a zatem – po podstawieniu $x = g(y)$ do równości $g(f(x)) = x$ – możemy wykorzystać implikację

$$g(f(g(y))) = g(y) \implies f(g(y)) = y \quad \text{dla } y \in f[X]$$

i wywnioskować stąd równość $f \circ g = \text{id}_{f[X]}$. Funkcja f jest odwrotna do $g = f^{-1}$, gdyż z (6.4) wynika także równość $X = g[f[X]]$. \square

Przykład 6.1.2. Funkcja \sqrt{x} dla $x \geq 0$, oraz funkcja x^2 dla $x \geq 0$, są wzajemnie odwrotne. Ogólniej, dla każdego wykładnika rzeczywistego $m > 0$ potęgi o wykładniku m oraz $\frac{1}{m}$ wyznaczają wzajemnie odwrotne funkcje

$$f(x) = x^m \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^{m^{-1}} \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Jeśli wykładnik m jest ujemny, opisane wyżej potęgi definiują wzajemnie odwrotne funkcje określone na dziedzinie liczb dodatnich.

Przykład 6.1.3. Jeśli $n = 2k - 1 \in \mathbb{N}$ jest liczbą nieparzystą, to funkcja x^n dla $x \in \mathbb{R}$ jest różnowartościowa, a więc posiada funkcję odwrotną. Ponieważ jednak pierwiastek $\sqrt[n]{x}$ definiowaliśmy wyłącznie dla argumentów nieujemnych, wypada rozszerzyć dotychczasową definicję i przyjąć dodatkowo

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x} \quad \text{dla } x < 0, k \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

6.2 Ciągłość funkcji

Podstawowe własności granic zebrane w Twierdzeniu 3.4.1 dotyczą zbieżności ciągów otrzymanych z danego ciągu zbieżnego (a_n) w wyniku zastosowania elementarnych operacji, takich, jak wyznaczenie wartości bezwzględnych, odwrotności lub pierwiastka. Badanie zbieżności analogicznych ciągów postaci $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie f jest ustaloną funkcją zmiennej rzeczywistej, prowadzi do określenia pojęcia ciągłości funkcji.

Definicja 6.2.1. Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do x_0 i złożonego z liczb należących do X ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

Funkcję f uznajemy za ciągłą, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na zbiorze $X' \subset X$, jeśli obcięcie $f|_{X'}$ jest funkcją ciągłą.

Sformułowana wyżej definicja ciągłości zwana jest *definicją Heinego*, dla odróżnienia od formalnie równoważnego podejścia przedstawionego w rozdziale 7 i związanego z nazwiskiem Cauchy'ego.

Uwaga 6.2.1. Ewentualna ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 \in X$ nie ma nic wspólnego z ciągłością f na zbiorze jednopunktowym $X' = \{x_0\} \subset X$. Ta druga jest własnością *trywialną*, przysługującą zgodnie z powyższą definicją każdej funkcji.

Bezpośrednio z definicji wynika, że ciągłość funkcji f na zbiorze X' pociąga za sobą ciągłość na każdym podzbiorze $X'' \subset X'$. Funkcja stała jest ciągła niezależnie od dziedziny, podobnie jak funkcja tożsamościowa $\text{id}_{\mathbb{R}}$.

Przykład 6.2.1. Funkcja $\text{sgn}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, o wartościach wynikających ze znaku zmiennej x nie jest ciągła w punkcie $x = 0$, co przejawia się w tym, że np. dla ciągu $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do 0, ciąg o wyrazie ogólnym $\text{sgn}(\frac{(-1)^n}{n}) = (-1)^n$ jest rozbieżny.

Przykład 6.2.2. Funkcja $g(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jest ciągła(!). Właściwie dlatego, że jej dziedzina nie zawiera punktu 0. Nie istnieje jednak rozszerzenie g do funkcji ciągłej na całej prostej \mathbb{R} , a więc takiej, której obcięcie byłoby równe $\frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$.

Stwierdzenie 6.2.1. *Każdy wielomian postaci $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ dla $x \in \mathbb{R}$ i ustalonego $k \in \mathbb{N}$, gdzie współczynniki a_0, a_1, \dots, a_k są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, jest funkcją ciągłą na całej prostej rzeczywistej \mathbb{R} .*

Każda funkcja wymierna, będąca ilorazem dwu funkcji wielomianowych P i Q , a więc postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus Q^{-1}\{0\}$, jest ciągła. W szczególności, funkcja f jest ciągła w dowolnym przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, w którym wielomian Q nie ma miejsc zerowych.

Dowód. Ćwiczenie. Skorzystać z elementarnych i algebraicznych własności granic (Twierdzenie 3.4.1 i Twierdzenie 3.4.5). \square

Własność ujęta w sformułowanym wyżej stwierdzeniu rozszerza się na dowolne operacje algebraiczne na funkcjach ciągłych i przyjmuje następującą postać:

Twierdzenie 6.2.2. *Niech f oraz g będą dowolnymi funkcjami zmiennej rzeczywistej określonymi na tej samej dziedzinie $X \subset \mathbb{R}$. Jeśli obie funkcje są ciągłe (w $x_0 \in X$), to ciągła (w x_0) jest także każda kombinacja liniowa, czyli funkcja postaci*

$$af + bg: X \ni x \mapsto af(x) + bg(x) \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$, oraz iloczyn

$$f \cdot g: X \ni x \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

Jeśli funkcja g nie jest stała i równa 0, to iloraz f/g lub $\frac{f}{g}$ określony wzorem

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{dla } x \in X \setminus g^{-1}\{0\}, \quad (6.8)$$

jest funkcją ciągłą o dziedzinie $\{x \in X; g(x) \neq 0\}$. Jeśli $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0 .

Dowód. Dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X zbieżnego do liczby $x_0 \in X$ zachodzą równości

$$\lim_n (af + bg)(x_n) = \lim_n (af(x_n) + bg(x_n)) = af(x_0) + bg(x_0), \quad \text{oraz}$$

$$\lim_n (f \cdot g)(x_n) = \lim_n (f(x_n)g(x_n)) = f(x_0)g(x_0).$$

W przypadku ilorazu funkcji ciągłych wystarczy zauważyć, że jeśli x_0 i wszystkie wyrazy x_n należą do zbioru $\{x \in X; g(x) \neq 0\}$, to spełnione są założenia Twierdzenia 3.4.5(iii), a więc także

$$\lim_n \frac{f}{g}(x_n) = \lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}. \quad \square$$

Klasę funkcji ciągłych w istotny sposób rozszerza możliwość dowolnego łączenia operacji algebraicznych ze składaniem funkcji.

Twierdzenie 6.2.3 (Ciągłość złożenia). *Dla dowolnych funkcji zmiennej rzeczywistej: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej w $x_0 \in X$, oraz $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ – określonej i ciągłej w $f(x_0) \in Y$, złożenie $g \circ f: f^{-1}Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w x_0 . Jeśli f i g są funkcjami ciągłymi, to $g \circ f$ również.*

Dowód. Jeśli wyrazy ciągu zbieżnego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz granica $x_0 = \lim_n x_n$ należą do zbioru $f^{-1}Y$, to ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zawarty w Y i zbieżny do $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$. Zachodzi równość

$$\lim_n g(f(x_n)) = g(\lim_n f(x_n)) = g(f(x_0)). \quad \square$$

Przykład 6.2.3. Funkcja $g(x) = e^{\frac{1}{\sin(x)}}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ jest ciągła. Korzystając np. z Maximy lub Maple naszkicować wykres funkcji i sprawdzić, czy istnieje „naturalne” rozszerzenie funkcji g na całą prostą \mathbb{R} .

Ćwiczenie 6.2.1. Zbadać ciągłość części całkowitej, czyli funkcji $[x]$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Jak widać, ciągłość funkcji na poszczególnych przedziałach tworzących dziedzinę nie implikuje ciągłości. Ważne wyjątki od tej „reguły” obejmują sytuacje, w których warunek ciągłości spełniony jest na pokrywającej dziedzinę rodzinie przedziałów otwartych lub – domkniętych o wspólnych końcach.

Twierdzenie 6.2.4. *Dla dowolnej funkcji zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego $x_0 \in X$, każda z poniższych własności jest równoważna ciągłości f w x_0 .*

(i) Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że ograniczenie funkcji f do przekroju zbioru X i przedziału $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ jest ciągłe w x_0 .

(ii) Oba ograniczenia funkcji f – lewostronne do zbioru $\{x \in X; x \leq x_0\}$, oraz prawostronne – do zbioru $\{x \in X; x \geq x_0\}$ są ciągłe w x_0 .

Dowód. Równoważność ciągłości (w x_0) i własności (i) wynika bezpośrednio z porównania definicji granicy ciągu i Definicji 6.2.1.

Konieczność ciągłości (w x_0) obu wskazanych w (ii) ograniczeń funkcji f jest oczywista. Wykażemy, że jest to także warunek dostateczny, implikujący ciągłość f w x_0 . Dla porównania – zrobimy to na 2 sposoby.

Dowód wprost. Załóżmy ciągłość funkcji f w x_0 na każdym ze zbiorów $\{x \in X; x \leq x_0\}$ i $\{x \in X; x > x_0\}$ i rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X zbieżny do x_0 . Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu są zawarte w jednym ze wskazanych zbiorów, to równość $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$ wynika z ciągłości odpowiedniego ograniczenia funkcji. Jeśli natomiast oba zbiory

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N}; x_n \leq x_0\} \quad \text{ i } \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N}; x_n > x_0\}$$

są nieskończone, to istnieją jednoznacznie określone rosnące ciągi liczb naturalnych p i q takie, że $N_1 = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ i $N_2 = \{q_n; n \in \mathbb{N}\}$, a ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest mieszaniną podciągów $(x_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ i $(x_{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ciągłość w x_0 obu wyróżnionych ograniczeń funkcji f oznacza istnienie i równość granic

$$\lim_n f(x_{p_n}) = f(x_0) = \lim_n f(x_{q_n}).$$

Z Wniosku 4.3.6 wynika zbieżność ciągu $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, będącego mieszaniną dwu podciągów zbieżnych do tej samej granicy $f(x_0)$.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że funkcja f nie jest ciągła w x_0 . Zgodnie z Definicją 6.2.1, w X istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do x_0 i taki, że liczba $f(x_0)$ nie jest granicą ciągu $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. To z kolei oznacza, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ zbiór $N = \{n \in \mathbb{N}; |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ jest nieskończony. Przynajmniej jeden ze zbiorów

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N}; x_n < x_0\} \cap N \quad \text{ lub } \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N}; x_n > x_0\} \cap N$$

jest zatem nieskończony, a w ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ można wybrać podciąg $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ zawarty w jednym ze zbiorów $X \cap (-\infty, x_0)$, $X \cap (x_0, \infty)$, dla którego ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny do $f(x_0)$. Wynika stąd, że przynajmniej jedno z ograniczeń funkcji f jest funkcją nieciągłą w x_0 . \square

W istocie ciągłość nie zależy od wartości funkcji w całej jej dziedzinie, lecz jest własnością *lokalną* i np. ciągłość w x_0 może być sprawdzona

(potwierdzona lub odrzucona) poprzez badanie ciągów zbieżnych, ograniczonych do dowolnie małego *otoczenia* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. W szczególności, dowolna funkcja określona na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym *punkcie izolowanym* $x_0 \in X$, czyli takim, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ przekrój $X \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ jest zbiorem jednopunktowym $\{x_0\}$.

Druga z własności charakteryzujących ciągłość funkcji w punkcie umożliwia „sklejanie” w sytuacji, gdy definicja funkcji zawiera odrębne formuły (wzory) na poszczególnych przedziałach domkniętych sumujących się do dziedziny.

Definicja 6.2.2. Funkcję zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy lewostronnie ciągłą w punkcie $x_0 \in X$, jeśli ciągłe w x_0 jest lewostronne ograniczenie funkcji – do zbioru $\{x \in X; x \leq x_0\}$. Prawostronna ciągłość f w punkcie x_0 oznacza ciągłość w x_0 prawostronnego ograniczenia funkcji f – do zbioru $\{x \in X; x \geq x_0\}$.

Wniosek 6.2.5. Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w x_0 . \square

Uwaga 6.2.2. Uważny czytelnik zauważył zapewne, że możliwe i naturalne jest jeszcze jedno „rozdzielenie” warunku ciągłości – według wartości badanej funkcji. Jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mieszczą się w przedziale $(f(x_0) - \varepsilon, \infty)$, oznacza to *półciągłość z góry*, a jeśli $f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, funkcja jest *półciągła z dołu* w x_0 . W odróżnieniu od jednostronnej ciągłości specyficznej dla funkcji (jednej) zmiennej rzeczywistej, pojęcie półciągłości dotyczy bardziej ogólnych funkcji rzeczywistych i pojawi się dalszej części kursu.

Przykład 6.2.4. Funkcja $\sqrt{x^2 - 4}$ dla $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, jest ciągła, mimo iż nie jest określona na przedziale $(-2, 2)$. W tym przypadku rozszerzenie do funkcji ciągłej na \mathbb{R} jest oczywiście możliwe, ale wymaga dodatkowego wzoru, np.

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{dla } x \in (-\infty, -2] \\ 0 & \text{dla } x \in [-2, 0] \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \in [0, 2] \\ \sqrt{x^2 - 4} & \text{dla } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Ciągłość każdego z podanych fragmentów funkcji jest znana. Pozostaje sprawdzić poprawność definicji – w punktach „połączeń” $x \in \{-2, 0, 2\}$.

Sprawdzenia ciągłości badanych funkcji można często uprościć odwołując się do znanych zależności pomiędzy wielkościami $|x - y|$ i $|f(x) - f(y)|$, gdzie $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, a $x, y \in X$.

Definicja 6.2.3. Warunkiem Cauchy’ego dla funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x_0 nazywamy własność

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (6.9)$$

Oznacza to, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ o tej własności, że nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $x \in X$ takich, że $|x - x_0| < \delta$.

Warunek Cauchy’ego uważany jest za podstawę alternatywnej definicji ciągłości funkcji, co precyzyjnie ujmuje

Twierdzenie 6.2.6 (Ciągłość w sensie Cauchy’ego). *Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy’ego w x_0 .*

Dowód. Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją zmiennej rzeczywistej. Dla dowolnego $x_0 \in X$ udowodnimy, że z warunku Cauchy’ego (6.9) wynika ciągłość. Jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem w X zbieżnym do x_0 , a $\varepsilon > 0$ – dowolną liczbą dodatnią, to liczba $\delta > 0$, której istnienie zapewnia warunek Cauchy’ego, pozwala wyróżnić w ciągu (x_n) wyrazy leżące w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ze zbieżności ciągu wynika istnienie indeksu $k \in \mathbb{N}$ takiego, że $|x_n - x_0| < \delta$, a zatem także $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ dla $n \geq k$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza to zbieżność $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ i ciągłość funkcji f w x_0 .

Implikację przeciwną udowodnimy nie wprost. Załóżmy, że dla funkcji f istnieje liczba $\varepsilon > 0$ zaprzeczająca warunkowi Cauchy’ego (6.9). Oznacza to, że dla każdej liczby $\delta > 0$, np. dla każdej liczby postaci $\delta_n = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, istnieje $x_n \in X$ takie, że $|x_n - x_0| < \delta_n$, a mimo to $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Tak skonstruowany ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X dąży do x_0 , natomiast ciąg wartości funkcji nie dąży do liczby $f(x_0)$. Wykazaliśmy zatem, że brak spełnienia warunku Cauchy’ego implikuje nieciągłość funkcji f w x_0 . \square

Wniosek 6.2.7. *Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest prawostronnie ciągła w $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon), \quad (6.10)$$

natomiast warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon), \quad (6.11)$$

jest równoważny lewostronnej ciągłości f w x_0 . \square

Ćwiczenie 6.2.2. Wykazać, że para warunków (6.10)–(6.11) jest równoważna warunkowi Cauchy’ego. Prowadzi to do prostszego dowodu Wniosku 6.2.5.

Dla funkcji ciągłych określonych na ograniczonym przedziale domkniętym własność ciągłości Cauchy’ego może być istotnie wzmocniona.

Definicja 6.2.4. Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, jeśli spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (6.12)$$

Ćwiczenie 6.2.3. Wykazać, że każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Sprawdzić, że funkcja ciągła x^2 dla $x \in \mathbb{R}$ nie jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 6.2.8 (Heinego). Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ określona i ciągła na przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła.

Dowód. Zakładając, że f nie jest funkcją jednostajnie ciągłą, otrzymujemy zaprzeczenie warunku (6.12), a zatem dla pewnego $\varepsilon > 0$ i dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ (czyli – dla $\delta = \frac{1}{n}$) istnieją liczby $x_n, y_n \in [a, b]$ takie, że

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{ i } \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \quad (6.13)$$

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa (wn. 4.3.2) wynika istnienie podciągu zbieżnego $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Podciąg $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest wówczas zbieżny do tej samej granicy $t := \lim_n x_{k_n} = \lim_n y_{k_n} \in [a, b]$, a własność (6.13) zaprzecza ciągłości funkcji w punkcie t . \square

6.3 Własności funkcji ciągłych

Analiza matematyczna dostarcza wiele dowodów na to, jak ważnym, fundamentalnym pojęciem jest ciągłość funkcji. Jako pierwszy z nich podajemy

Twierdzenie 6.3.1 (Własność Darboux). Dowolna funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła na przedziale domkniętym $[a, b] \subset X$ i taka, że $f(a) \neq f(b)$, przyjmuje na zbiorze $[a, b]$ wszystkie wartości pośrednie, tzn. dla dowolnej liczby y zawartej między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje liczba $c \in [a, b]$ taka, że $f(c) = y$.

Dowód. Zastępując ewentualnie funkcję f przez $-f$, a y przez $-y$, możemy założyć nierówność $f(a) < y < f(b)$; przyjmijmy $a_1 = a$ i $b_1 = b$. Na mocy zasady indukcji istnieją dwa ciągi monotoniczne $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, takie że

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

przy czym

$$f(a_n) \leq y \leq f(b_n) \quad \text{i} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \quad (6.14)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, mając już wyrazy $a_n < b_n$ spełniające (6.14) dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, wystarczy przyjąć

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n, & b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{jeśli } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) &\leq y, & \text{ albo} \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= b_n, & \text{jeśli } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) &> y. \end{aligned}$$

Skonstruowane ciągi są ograniczone, a więc zbieżne, a zgodnie z (6.14) mają tę samą granicę $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n \in [a, b]$, taką że $f(c) = y$. \square

Własność Darboux jest podstawą dla sformułowania elementarnej *metody połowienia*, czyli algorytmu *przybliżonego wyznaczania miejsc zerowych funkcji*, czyli rozwiązywania równań postaci $f(x) = 0$ (a więc także $f(x) - y = 0$) w przypadku, gdy f jest funkcją ciągłą.

Algorytm połowienia

Założenia: Funkcja zmiennej rzeczywistej f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, przy czym $f(a)f(b) < 0$.

Cel: Przybliżona wartość miejsca zerowego $x_0 \in [a, b]$, czyli jednej z liczb takich, że $f(x_0) = 0$, z zadaną dokładnością $\varepsilon > 0$.

```
do {
  c <- (a+b)/2
  if (f(c)f(a) > 0)
    a <- c
  else
    b <- c
} while (b-a > eps)
```

Wynik: c .

Przykład 6.3.1. Liczba $\sqrt{2}$ jest miejscem zerowym funkcji ciągłej $x^2 - 2$ dla $x \in [1, 2]$. Na końcach przedziału funkcja zmienia znak, a zatem algorytm połowienia ma zastosowanie. Zbieżność algorytmu nie jest oszałamiająca, a dokładność $\varepsilon = 0.000000001$ (por. Ćwiczenie 3.3.1) uzyskamy dopiero po 30 iteracjach.

Kolejną własność można uważać za uzupełnienie Twierdzenia 6.3.1, ma ona jednak samodzielny, odrębny charakter.

Stwierdzenie 6.3.2. *Dla dowolnej ciągłej funkcji zmiennej rzeczywistej f na przedziale domkniętym $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i dowolnej liczby c należącej do obrazu funkcji przeciwobraz, czyli zbiór $Z_c := \{x \in [a, b]; f(x) = c\}$ zawiera liczbę najmniejszą i liczbę największą.*

Dowód. Oznaczmy $M = \sup Z_c \in [a, b]$. Z definicji kresu górnego wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $x_n \in Z_c$ taka, że $M - \frac{1}{n} < x_n \leq M$. Stąd $M = \lim_n x_n$ i $f(M) = \lim_n f(x_n) = c$, a zatem $M \in Z_c$. Dowód dla kresu dolnego $m = \inf Z_c$ jest analogiczny. \square

Wniosek 6.3.3. *Jeśli funkcja zmiennej rzeczywistej f określona na dowolnym przedziale $J \subset \mathbb{R}$ jest ciągła, to obraz $f[J]$ również jest przedziałem.*

Dowód. Zgodnie z charakteryzacją przedziałów zawartą w Twierdzeniu 2.1.5 wystarczy pokazać, że dla dowolnych $a, b \in f[J]$ obraz $f[J]$ zawiera przedział $[a, b]$ – zakładamy, bez zmniejszenia ogólności, że $a \leq b$. Jako należące do obrazu funkcji f , liczby a i b są postaci $a = f(x), b = f(y)$, dla pewnych $x, y \in J$. Z Twierdzenia 6.3.1 wynika, że dla każdej liczby $c \in [a, b]$, w przedziale o końcach x, y istnieje $z \in J$ takie, że $c = f(z) \in f[J]$. \square

Twierdzenie 6.3.4 (Weierstrassa). *Dla dowolnej funkcji zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej na przedziale domkniętym $[a, b] \subset X$ istnieją w tym przedziale zarówno wartość maksymalna $\max(f)$ jak i wartość minimalna $\min(f)$ funkcji. W szczególności, funkcja $f|_{[a, b]}$ jest ograniczona i*

$$\begin{aligned} \inf\{f(x); x \in [a, b]\} &= f(x') = \min(f) \quad i \\ \sup\{f(x); x \in [a, b]\} &= f(x'') = \max(f) \end{aligned}$$

dla pewnych liczb $x', x'' \in [a, b]$, a obraz $f[[a, b]]$ jest skończonym przedziałem domkniętym $[f(x'), f(x'')]$.

Dowód. Podstawą dla dowodu jest Wniosek 4.3.2, czyli twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Gdyby funkcja $f|_{[a, b]}$ nie była ograniczona, to w przedziale

$[a, b]$ istniałby ciąg – a w nim podciąg zbieżny $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – taki, że dla każdego n zachodziłaby nierówność $|f(x_n)| > n$. Rozbieżność ciągu $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zaprzeczałaby ciągłości funkcji. Niech zatem $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}$. Z definicji kresu dolnego wynika istnienie w przedziale $[a, b]$ ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takiego, że

$$m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ciągłość funkcji f zapewnia, że dla dowolnego podciągu zbieżnego $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, zachodzi równość $f(\lim_n x_{k_n}) = m$, przy czym $x' := \lim_n x_{k_n} \in [a, b]$. Analogiczny dowód dla kresu górnego pozostawiamy czytelnikowi. \square

Definicja 6.3.1. Liczbę $x' \in (a, b)$ będziemy nazywać punktem lokalnego minimum funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$(x' - \delta, x' + \delta) \subset [a, b] \quad \text{i} \quad f(x') = \inf\{f(x); |x - x'| < \delta\}.$$

Liczba $x'' \in (a, b)$ jest punktem lokalnego maksimum funkcji f , jeśli

$$(x'' - \delta, x'' + \delta) \subset [a, b] \quad \text{i} \quad f(x'') = \sup\{f(x); |x - x''| < \delta\}$$

dla pewnego $\delta > 0$. Wartości $f(x')$ i $f(x'')$ są, odpowiednio, lokalnym minimum i lokalnym maksimum funkcji.

Jeśli w przedziale $[a, b]$ funkcja ciągła f osiąga lokalne minimum w jednym tylko punkcie $x_{\min} \in (a, b)$, to przybliżoną wartość punktu minimum – z dowolną dokładnością – można znaleźć za pomocą algorytmu podobnego do metody połowienia. Niech $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$ oznacza złotą liczbę spełniającą równość $1 = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}$ (por. Uwagę 3.2.1). Sformułowany niżej algorytm złotego podziału korzysta z faktu, iż dla dowolnej liczby $x > 0$ ma miejsce rozkład

$$x = \frac{x}{\omega} + \frac{x}{\omega^2} = \left(\frac{x}{\omega^2} + \frac{x}{\omega^3} \right) + \frac{x}{\omega^2},$$

znany z podziału każdej z krawędzi foremnego pięciokąta gwiaździstego. Jeśli podział ten zastosować do przedziału $[a, b]$ i przyjąć $d = a + \frac{b-a}{\omega}$, $c = b - \frac{b-a}{\omega}$, to dla liczb $a < c < d < b$ zachodzą równości

$$b - a = \omega(d - a) = \omega(b - c) = \omega^2(c - a) = \omega^2(d - b) = \omega^3(d - c).$$

W kolejnych krokach algorytm zastępuje czwórkę liczb $(a, c, d, b) \in [a, b]$ przez analogiczną – w jednym z przedziałów $[a, d]$ lub $[c, b]$, którego długość zmniejsza się zawsze w tym samym stosunku ω , a jeden z punktów wewnętrznych podziału pozostaje niezmienny. Zastąpienie funkcji f przez $-f$ prowadzi do metody złotego podziału, czyli algorytmu wyznaczania maksimum.

Algorytm złotego podziału

Założenia: Funkcja zmiennej rzeczywistej f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Przynajmniej w jednym z punktów $d = a + \frac{b-a}{\omega}$ lub $c = b - \frac{b-a}{\omega}$ wartość f jest mniejsza niż $\min\{f(a), f(b)\}$.

Cel: Przybliżona wartość $x_{\min} \in (a, b)$ miejsca minimum funkcji $f(x)$ dla $x \in [a, b]$ z zadaną dokładnością $\varepsilon > 0$.

```
do {
  if (f(c) < f(d)) {
    b <- d
    d <- c
    c <- a + (b-d)
  } else {
    a <- c
    c <- d
    d <- b - (c-a)
  }
} while (b-a > eps)
```

Wynik: $\frac{a+b}{2}$.

W każdym z kroków liczba $\min\{f(c), f(d)\}$ jest mniejsza od każdej z liczb $f(a), f(b)$, a więc minimum osiągnięte jest zawsze w jednym z punktów przedziału (a, b) . Zbieżność jest wolniejsza niż w algorytmie połowienia – ponieważ $\omega^{10} \approx 123 > 100$, każde kolejne 2 cyfry dokładności wymagają ok. 10 kroków iteracji.

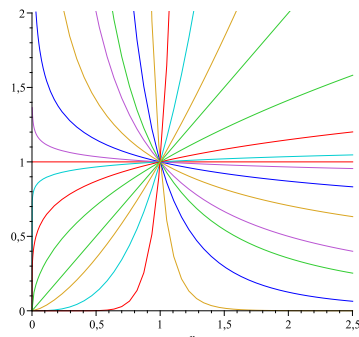
Ćwiczenie 6.3.1. Korzystając np z Maximy lub Maple wyznaczyć miejsce maksimum funkcji $\sin(x) - \frac{x}{2}$ dla $x \in [0, 2]$. Ile kroków potrzeba, by uzyskać dokładność 10^{-5} ?

Uwaga 6.3.1. Ponieważ obliczenia komputerowe wykonywane na liczbach rzeczywistych *nie są dokładne* i ograniczają się z reguły do kilkunastu cyfr rozwinięcia dziesiętnego, związany z tym *błąd zaokrągleń* kumuluje się w trakcie wielokrotnych iteracji. Z tego powodu faktyczna realizacja algorytmu złotego podziału zastępuje za każdym razem dwie instrukcje wyznaczające c i d przez wzory $c = b - \frac{b-a}{\omega}$ i $d = a + \frac{b-a}{\omega}$.

6.4 Przykłady funkcji elementarnych

Definicja 6.4.1. Funkcją potęgową o wykładniku rzeczywistym $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (niebędącym liczbą całkowitą) nazywamy funkcję $x \mapsto x^a$ określoną dla

argumentów $x \in (0, \infty)$. W przypadku wykładnika $a > 0$, za dziedzinę funkcji potęgowej x^a przyjmujemy przedział domknięty $[0, \infty)$



Rysunek 6.1: Funkcje potęgowe dla różnych wykładników

Oczywiście, funkcja potęgowa o wykładniku $a = n \in \mathbb{N}$ jest określona na całej prostej rzeczywistej \mathbb{R} , a w przypadku $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ – na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dziedzinę \mathbb{R} ma także funkcja *pierwiastek stopnia nieparzystego* $2k-1$ rozszerzona zgodnie ze wzorem (6.5).

Stwierdzenie 6.4.1. *Funkcje potęgowe są ciągłe w całej swej dziedzinie.*

Dowód. Sformułowanie zawarte w Stwierdzeniu 4.5.4 oznacza ciągłość na zbiorze $[0, \infty)$ każdej funkcji potęgowej o wykładniku dodatnim. Z tożsamości $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ dla $x > 0$ wynika ciągłość na przedziale $(0, \infty)$ potęgi o wykładniku ujemnym.

Ciągłość rozszerzonego na \mathbb{R} pierwiastka stopnia nieparzystego wynika z Twierdzenia 6.2.4(ii). \square

Stwierdzenie 6.4.2. *Przy dowolnej podstawie $a > 0$, funkcja wykładnicza a^x dla $x \in \mathbb{R}$ jest ciągła.*

Dowód. Możemy skorzystać z udowodnionych już własności (4.20) i powtórzyć główny schemat oszacowań użyty w dowodzie Lematu 4.4.2. Ze względu na tożsamość $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$, wystarczy wykazać ciągłość funkcji wykładniczej o podstawie $a > 1$. Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym zbieżnym. Jeśli $x_0 = \lim_n x_n$, to dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n_k \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x_0| < \frac{1}{k}$ dla $n \geq n_k$. Oznaczając przez $M \in \mathbb{R}$ dowolne ograniczenie górne ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, otrzymujemy, zależnie od znaku różnicy

$x_n - x_0$, nierówności

$$|a^{x_n} - a^{x_0}| = \left\{ \begin{array}{l} a^{x_0}(a^{x_n-x_0} - 1) \\ a^{x_n}(a^{x_0-x_n} - 1) \end{array} \right\} \leq a^M(a^{\frac{1}{k}} - 1) \leq a^M \frac{a-1}{k},$$

dla $n \geq n_k$, zgodnie z oszacowaniem podanym w Stwierdzeniu 2.2.3(ii). Stąd $|a^{x_n} - a^{x_0}| < \varepsilon$, jeśli tylko $k > a^M \frac{a-1}{\varepsilon}$ $n \geq n_k$. \square

Wstępną listę ciągłych *funkcji elementarnych* zamykają sinus i kosinus. Funkcje *sinus* i *kosinus*, $\sin(x)$ i $\cos(x)$, dla $x \in \mathbb{R}$, uznajemy za zdefiniowane w szkole średniej, a więc „znane”. Wiemy zatem, że spełnione są m.in. zależności

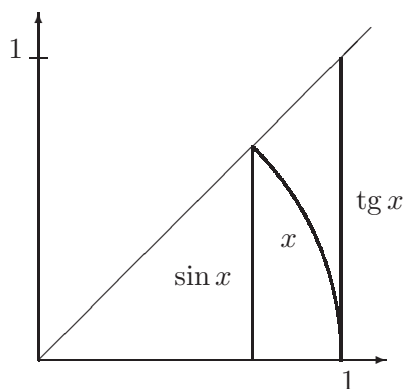
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \quad \text{i} \quad (6.15)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad (6.16)$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$, niezależnie od tego, czy miara obu kątów x i y wyrażana jest w stopniach, czy w radianach. Ustalenie dla argumentów funkcji trygonometrycznych miary łukowej oznacza, że argument $x \in [0, 2\pi]$ każdej z funkcji jest „długością łuku na okręgu o promieniu 1, na którym oparty jest opisywany przez x kąt.” Efektem takiego wyboru jednostki miary jest nierówność

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad (6.17)$$

mająca swoje intuicyjne uzasadnienie w postaci Rysunku 6.2.



Rysunek 6.2: Geometryczna interpretacja relacji (6.17)

Stwierdzenie 6.4.3. Funkcje trygonometryczne $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ są ciągłe.

Funkcje $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ i $\operatorname{ctg} = \frac{\cos}{\sin}$ są ciągłe tam, gdzie są określone. Obrazem obu funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Dowód. Ciągłość funkcji \sin i \cos wynika np. z tożsamości

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R},$$

znanej ze szkoły średniej. Istotnie, korzystając z nierówności $|\sin(z)| \leq |z|$ oraz $|\cos(z)| \leq 1$, dostajemy oszacowanie

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \quad (6.18)$$

z którego wynika ciągłość funkcji *sinus*. Ciągłość funkcji *kosinus* jest konsekwencją tożsamości $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ciągłość funkcji *tangens*, $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ dla x takich, że $\cos(x) \neq 0$, jest konsekwencją Twierdzenia 6.2.2, podobnie jak ciągłość funkcji *kotangens*. Wyznaczenie obrazu funkcji tg pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 6.4.1. Wykazać zależność

$$3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) = \sin(3x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć analogiczną zależność pomiędzy wielkościami $\cos(x)$ i $\cos(3x)$.

Uwaga 6.4.1. Podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej, czy też potęgi o wykładniku rzeczywistym ciągłość funkcji trygonometrycznych pozwala na wyznaczanie przybliżonych wartości funkcji *sinus* i *kosinus* (i ich ilorazów). W czasach „przed-komputerowych” umożliwiało to przygotowanie i druk stosownych tablic – bardziej dokładnych dla nawigacji i geodezji lub mniej dokładnych – dla inżynierów. Również w ramach kursu *Analizy I*, dopóki nie dysponujemy innymi metodami obliczeniowymi, pozostaje nam przypomnieć kilka wzorów znanych z elementarnej trygonometrii.

Ćwiczenie 6.4.2. (i) Korzystając z równości $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, sprawdzić, że

$$\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

(ii) Wiedząc, że przekątne pięciokąta foremnego dzielą się w proporcjach opisanych przez *złoty podział*, wykazać równość

$$\sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

(iii) Wyprowadzić stąd jawny wzór na $\sin(3^\circ)$. Wyznaczyć przybliżoną wartość $z = \sin(1^\circ) = \sin(\frac{\pi}{180})$ z dokładnością do 10^{-10} , rozwiązując metodą połowienia równanie $3z - 4z^3 = \sin(3^\circ)$.

(iv) Oszacować liczbę π wykorzystując nierówność $\sin(1^\circ) < \frac{\pi}{180} < \operatorname{tg}(1^\circ)$.

6.5 Funkcje monotoniczne i do nich odwrotne

Definicja 6.5.1. Funkcję zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ściśle monotoniczną, jeśli jest

(i) rosnąca, tzn. $f(x) < f(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$, albo

(ii) malejąca, tzn. $f(x) > f(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$.

Funkcja f jest monotoniczna, jeśli jest

(i') niemalejąca, tzn. jeśli $f(x) \leq f(y)$ dla $x \leq y$ lub

(ii') nierosnąca, tzn. jeśli $f(x) \geq f(y)$ dla $x \leq y$.

Uwaga 6.5.1. Implikacje definiujące funkcje ściśle monotoniczne są w istocie równoważnościami. Dowolna funkcja rosnąca f ma własność

$$x < y \iff f(x) < f(y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Zaskakujący związek między monotonicznością i ciągłością opisuje

Stwierdzenie 6.5.1. Dla dowolnej ściśle monotonicznej funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na dowolnym przedziale $J \subset \mathbb{R}$ funkcja odwrotna $f^{-1}: f[J] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Funkcja f jest ciągła, jeśli obraz $f[J]$ jest przedziałem.

Dowód. Dla ustalenia uwagi założymy, że f jest funkcją rosnącą. Przypuśćmy, że dla pewnego $y_0 = f(x_0) \in f[J]$ funkcja f^{-1} nie jest ciągła w y_0 . Zgodnie z Definicją 6.2.1 oznacza to, że w zbiorze $f[J]$ istnieje ciąg $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do y_0 , ale taki, że x_0 nie jest granicą ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ utworzonego z punktów $x_n := f^{-1}(y_n) \in J$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niezależnie od tego, czy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny, czy też zbieżny do innej liczby, brak zbieżności do x_0 oznacza istnienie liczby $\varepsilon > 0$ takiej, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu leży poza przedziałem $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Skoro zatem zbiór

$$\{n \in \mathbb{N}; |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N}; x_n \leq x_0 - \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N}; x_n \geq x_0 + \varepsilon\} = N^- \cup N^+$$

jest nieskończony, ta sama własność przysługuje przynajmniej jednemu ze zbiorów N^- i N^+ . Jeśli $n \in N^- \neq \emptyset$, to $x_0 - \varepsilon \in [x_n, x_0) \subset J$, a zatem

$$y_n = f(x_n) \leq f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 \quad \text{dla } n \in N^-$$

i analogicznie

$$y_n = f(x_n) \geq f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0) = y_0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}^+,$$

jeśli tylko zbiór N^+ jest niepusty. Gdyby choć jedna z podanych tu nierówności zachodziła dla nieskończenie wielu n , to odpowiedni podciąg ciągu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prowadziłby w granicy do sprzeczności postaci $y_0 \leq f(x_0 - \varepsilon) < y_0$ lub $y_0 \geq f(x_0 + \varepsilon) > y_0$. Sprzeczność pojawia się z założenia braku ciągłości funkcji odwrotnej do f . Zatem f^{-1} jest funkcją ciągłą.

Przypadek funkcji f malejącej wynika z udowodnionego już lematu zastosowanego dla funkcji rosnącej $-f$, do której odwrotną jest funkcja $f^{-1}(-y)$ dla $y \in (-f)[J]$.

Dla dowodu drugiej części tezy wystarczy zauważyć, że jeśli dziedzina funkcji ściśle monotonicznej $f^{-1}: f[J] \rightarrow \mathbb{R}$ jest przedziałem, to z udowodnionej już tezy wynika ciągłość funkcji f odwrotnej do f^{-1} . \square

Jako ważny wniosek wyprowadzimy stąd

Twierdzenie 6.5.2 (O ciągłości funkcji odwrotnej). *Niech $J \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem, a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną, określoną na J różnowartościową funkcją ciągłą. Wówczas funkcja odwrotna $f^{-1}: f[J] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Co więcej, funkcje f i f^{-1} są ściśle monotoniczne, a zbiór $f[J]$ jest również przedziałem.*

Aby z ciągłości i różnowartościowości f wywnioskować, że jest to funkcja ściśle monotoniczna, skorzystamy jeszcze z pomocniczej własności mającej swe źródło w Twierdzeniu 6.3.1.

Lemat 6.5.3. *Jeśli funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to*

(i) *dla dowolnych liczb $a, b, c \in J$ takich, że $a < b < c$,*

$$f(a) < f(b) < f(c) \quad \text{albo} \quad f(a) > f(b) > f(c), \quad \text{oraz}$$

(ii) *dla dowolnych liczb $a, b, c, d \in J$ takich, że $a < b < c < d$,*

$$f(a) < f(b) < f(c) < f(d) \quad \text{albo} \quad f(a) > f(b) > f(c) > f(d),$$

co oznacza, że dokładnie jedna ze wskazanych możliwości jest prawdziwa.

Dowód. Rozważmy na początek dowolną trójkę liczb $a < b < c$ w J . Załóżmy, że $f(a) < f(c)$. Gdyby $f(b) < f(a)$, to dla liczby $f(a) \in (f(b), f(c))$ z własności Darboux wynikałoby istnienie liczby $a' \in [b, c]$ takiej, że $f(a') = f(a)$,

przy czym $a < a'$ – sprzeczność. Do sprzeczności prowadzi także przypuszczenie, że $f(c) < f(b)$, gdyż wówczas dla liczby $f(c) \in (f(a), f(b))$ istniałoby $c' \in (a, b)$ takie, że $c' < c$ i $f(c') = f(c)$. Zatem $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$, czyli $f(a) < f(b) < f(c)$. W przypadku $f(a) > f(c)$ dowód nierówności $f(a) > f(b) > f(c)$ przebiega analogicznie.

Wybierając spośród liczb a, b, c, d trójki $a < b < c$ i $b < c < d$ zauważamy, że wynikające z wykazanej wyżej alternatywy opcje dotyczące układu nierówności są *zgodne*, jako jednoznacznie wyznaczone przez nierówność pomiędzy liczbami $f(b)$ i $f(c)$. Oznacza to jedną z dwu możliwych par zależności:

$$\begin{aligned} f(a) < f(b) < f(c) \text{ i } f(b) < f(c) < f(d), \text{ albo} \\ f(a) > f(b) > f(c) \text{ i } f(b) > f(c) > f(d). \end{aligned}$$

□

Dowód Twierdzenia 6.5.2. Jeśli f nie jest funkcją ściśle monotoniczną, to istnieją liczby $x_1, x_2, x_3, x_4 \in J$ takie, że $x_1 < x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$, oraz $x_3 < x_4$ i $f(x_3) > f(x_4)$. Zbiór $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ zawiera 3 lub 4 liczby. Lemat 6.5.3 gwarantuje, że nie istnieje opcja, w której relacje $f(x_1) < f(x_2)$ i $f(x_3) > f(x_4)$ występują jednocześnie. Sprzeczność dowodzi ścisłej monotoniczności funkcji różnowartościowej i ciągłej f .

Ze Stwierdzenia 6.5.1 wynika teraz ciągłość funkcji $f^{-1}: f[J] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym ścisła monotoniczność funkcji odwrotnej zawarta jest w Uwadze 6.5.1.

□

Możemy teraz rozszerzyć listę funkcji elementarnych o funkcje odwrotne – do funkcji wykładniczej oraz do funkcji trygonometrycznych.

Definicja 6.5.2. Dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej $a \neq 1$ logarytmem o podstawie a nazywamy funkcję $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ odwrotną do funkcji wykładniczej a^x dla $x \in \mathbb{R}$. Logarytm o podstawie $a = e$ (liczba Eulera) nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy \ln .

O istnieniu funkcji \log_a decyduje ścisła monotoniczność funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$. Dziedziną funkcji odwrotnej jest przedział $J \subset \mathbb{R}$ będący obrazem funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$. Jeśli $a > 1$, to z własności

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} a^x > 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_n a^n = \infty \quad \text{i} \quad \lim_n a^{-n} = 0,$$

(por. Wniosek 4.2.3) wynika równość $J = (0, \infty)$. Ten sam zbiór jest obrazem funkcji wykładniczej $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wniosek 6.5.4. Funkcja \log_a jest ciągła i rosnąca dla $a > 1$ a malejąca, gdy $0 < a < 1$. Zachodzą równości

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{dla } x > 0, \quad (6.19)$$

$$\ln(x^b y^c) = b \ln(x) + c \ln(y) \quad \text{dla } x, y > 0 \quad \text{i dowolnych } b, c \in \mathbb{R}. \quad (6.20)$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Wiemy, że funkcja \sin przyjmuje na przedziale $(0, \pi)$ wartości dodatnie. Z tożsamości

$$\cos(y) - \cos(x) = -2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

wynika, że *kosinus* jest na przedziale $[0, \pi]$ funkcją malejącą. Zatem $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ jest dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ funkcją rosnącą. Analogiczna tożsamość

$$\operatorname{tg}(y) - \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(y-x)}{\cos(x)\cos(y)}$$

dowodzi, że *tangens* jest funkcją rosnącą na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stąd

Definicja 6.5.3. Funkcje cyklotometryczne, czyli odwrotne funkcje trygonometryczne

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{i} \quad (6.21)$$

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{oraz} \quad (6.22)$$

$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.23)$$

nazywamy odpowiednio: arcus sinus, arcus cosinus i arcus tangens.

Wniosek 6.5.5. Funkcje cyklotometryczne są ciągłe i zachodzi równość

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1]. \quad (6.24)$$

Dowód. Ćwiczenie. □

6.6 Funkcje trygonometryczne – nieco dokładniej

Ponieważ szkolna definicja funkcji *sinus* i *kosinus* korzysta z miary (długości) łuku, a więc wielkości, dla której nie mamy w tym momencie precyzyjnej definicji, potraktujemy sformułowane w podrozdziale 6.4 własności (6.15)-(6.17) jak *aksjomaty*. Niech zatem $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dowolną ustaloną parą funkcji spełniających warunki

SC 1. $s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$, $c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

oraz

SC 2. $0 < xc(x) < s(x) < x$ dla $x \in (0, 1)$.

Wykażemy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $s(x) = \sin(x)$ i $c(x) = \cos(x)$.

Lemat 6.6.1. *Funkcje s i c mają następujące własności*

(i) $s(-x) = -s(x)$, $c(-x) = c(x)$ i

(ii) $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$,

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, oraz

(iii) $s(x) - s(y) = 2s(\frac{x-y}{2})c(\frac{x+y}{2})$ i $c(x) - c(y) = -2s(\frac{x-y}{2})s(\frac{x+y}{2})$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Własność sformułowana w (i) oznacza, że s jest funkcją *nieparzystą*, a c – funkcją *parzystą*.

Dowód. Z warunku **SC 1**, porównując prawe strony dla par $(x, 0)$ oraz $(0, x)$, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} s(0-x) &= s(0)c(x) - c(0)s(x) = -(s(x)c(0) - c(x)s(0)) = -s(x-0) \quad \text{i} \\ c(0-x) &= c(0)c(x) + s(0)s(x) = c(x)c(0) + s(x)s(0) = c(x-0), \end{aligned}$$

co oznacza potwierdzenie własności (i). Z kolei dla $x = y$ równości podane w **SC 1** redukują się do $s(0) = 0$ oraz $c(x)^2 + s(x)^2 = c(0)$ dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym ostatnia z równości rozważana dla $x = 0$ oznacza zależność

$$c(0)^2 = c(0).$$

Z dwu możliwości: $c(0) = 0$ lub $c(0) = 1$, pierwszą musimy odrzucić, gdyż prowadziłyby do tożsamości $c(x)^2 + s(x)^2 = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, a ze względu na warunek **SC 2** funkcje s i c nie mogą być tożsamościowo równe 0. Wynikająca stąd równość $c(0) = 1$ kończy także dowód własności (ii), czyli tzw. *jedynki trygonometrycznej*.

Własność (iii) sprowadza się do tożsamości

$$s\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}\right) - s\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = 2s\left(\frac{x-y}{2}\right)c\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

oraz analogicznej – dla różnicy $c(x) - c(y)$. □

Lemat 6.6.2. (i) *Funkcje s i c są ciągłe na \mathbb{R} .*

(ii) Istnieje liczba $\pi \in [2, 4]$ taka, że $s(\pi) = s(0) = 0$ i $s(x) > 0$ dla $x \in (0, \pi)$, natomiast c jest w przedziale $[0, \pi]$ funkcją malejącą od $c(0) = 1$ poprzez $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ do $c(\pi) = -1$.

(iii) $s(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-c(x)}{2}}$ i $c(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+c(x)}{2}}$ dla $x \in [0, \pi]$.

Dowód. Wobec nieparzystości funkcji s , nierówność $s(x) < x$ zawarta w (ii) implikuje własność $|s(x)| = s(|x|) \leq |x|$ dla $|x| < 1$, a ponieważ $|s(x)| \leq 1$, wynika stąd nierówność

$$|s(x)| \leq |x| \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Podobnie jak w (6.18), z Lematu 6.6.1(ii) otrzymujemy oszacowania

$$|s(x) - s(y)| \leq |x - y| \quad \text{i} \quad |c(x) - c(y)| \leq |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R},$$

a zatem – ciągłość obu badanych funkcji. Z własności **SC 1**, dla $y = -x$, wynikają zależności

$$s(2x) = 2s(x)c(x) \quad \text{i} \quad c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1 \quad (6.25)$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Z kolei wykazana wyżej ciągłość pozwala zauważyć, że nierówność $0 < xc(x) < s(x)$ dla $x \in (0, 1)$, prawdziwa w szczególności dla $x = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, implikuje nierówność $0 \leq c(1) \leq s(1)$. Ponieważ jednocześnie $c(2) = c(1)^2 - s(1)^2 \leq 0$, funkcja c przyjmuje wartość 0 na przynajmniej jednym z końców przedziału domkniętego $[1, 2]$ lub zmienia w tym przedziale znak (z + na -). Z własności Darboux (Twierdzenie 6.3.1) wynika istnienie liczby $x_0 \in [1, 2]$ takiej, że $c(x_0) = 0$. Dla $\pi := 2x_0 \in [2, 4]$ mamy równość

$$s(\pi) = 2s(x_0)c(x_0) = 0.$$

Zauważmy, że x_0 jest *jedynym* miejscem zerowym funkcji c w przedziale $[1, 2]$. Istotnie, przypuśćmy, że $c(x_1) = c(x_2) = 0$ dla dwu liczb spełniających nierówność $1 \leq x_1 < x_2 \leq 2$. Ponieważ z równości $c(1) = 0$ wynikałoby $c(2) = -1$, co wyklucza przypadek $x_1 = 1, x_2 = 2$, z **SC 1** otrzymujemy

$$c(x_2 - x_1) = 0, \quad \text{przy czym } 0 < x_2 - x_1 < 1,$$

a to pozostaje w sprzeczności z **SC 2**. Liczba $\frac{\pi}{2} = x_0$ jest zatem jedynym miejscem zerowym funkcji c w całym przedziale $[0, 2]$.

Z drugiej strony, z **SC 2** wynika nierówność

$$s(x) = 2s\left(\frac{x}{2}\right)c\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \quad \text{dla } x \in (0, 2),$$

gdyż oba czynniki są wówczas dodatnie. Jeśli w kolejnym przedziale $[2, 4)$ funkcja s nie ma miejsc zerowych, to – jako funkcja ciągła – s nie zmienia znaku w całym przedziale $(0, 4)$, a liczba $\pi = 4$ jest najmniejszym dodatnim miejscem zerowym. Dla odmiany, istnienie jakiegokolwiek miejsca zerowego $x_3 \in [2, 4)$ funkcji s implikuje równość $c(\frac{x_3}{2}) = 0$, czyli $\frac{x_3}{2} = x_0$ i $x_3 = \pi$. Zatem także i w tym przypadku na całym przedziale $(0, \pi)$ funkcja s ma ten sam znak – jest dodatnia. Monotoniczność funkcji c potwierdza wynikająca z Lematu 6.6.1(iii) nierówność

$$c(x) - c(y) = 2s\left(\frac{y-x}{2}\right)s\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$$

dla dowolnych $x < y$ zawartych w przedziale $[0, \pi]$. Równość $c(\pi) = -1$ wynika teraz z jedyńki trygonometrycznej i faktu, że $c(\pi) < c(\frac{\pi}{2})$ jest liczbą ujemną.

Wzory *połówkowe* podane w (iii) stanowią jedyne nieujemne rozwiązania równań $c(x) = 2c(\frac{x}{2})^2 - 1 = 1 - 2s(\frac{x}{2})^2$. \square

Twierdzenie 6.6.3 (O jednoznaczności funkcji \sin i \cos). *Funkcje sinus i kosinus są jedyną parą funkcji zmiennej rzeczywistej określonych na całej prostej rzeczywistej \mathbb{R} i mających własności **SC 1** – **SC 2**.*

Dowód. Załóżmy, że para funkcji zmiennej rzeczywistej s i c spełnia warunki **SC 1** – **SC 2**, a zatem ma własności opisane w Lemacie 6.6.1 i Lemacie 6.6.2. Wychodząc od własności $s(\pi) = 0 = \sin(\pi)$ i $c(\pi) = -1 = \cos(\pi)$, wykażemy równość

$$s(\pi \cdot x) = \sin(\pi x) \quad \text{ i } \quad c(\pi \cdot x) = \cos(\pi x), \quad (6.26)$$

w pierwszej kolejności dla dowolnych liczb postaci $x = \frac{k}{2^n}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

I. Przypadek $x = \frac{1}{2^n}$ sprawdzamy dla $n = 1$, korzystając ze wzorów połówkowych (iii) podanych w Lemacie 6.6.2. W ten sam sposób sprawdzamy krok indukcyjny:

$$c\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + c(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

i podobnie $s(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$, jeśli tylko $c(\frac{\pi}{2^n}) = \cos(\frac{\pi}{2^n})$.

II. W przypadku $x = \frac{k}{2^n}$ dla $k \in \mathbb{N}$, dowód równości jest także indukcyjny i korzysta ze zgodnych wzorów na wartości każdej z funkcji dla sumy k równych składników. Równości rozciągają się na dowolne $k \in \mathbb{Z}$ ze względu na parzystość funkcji c i nieparzystość funkcji s .

III. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ ciąg przybliżeń $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ z rozwinięcia binarnego liczby x składa się z liczb opisanej wyżej postaci. Zatem z ciągłości rozważanych funkcji otrzymujemy równości

$$c(\text{pi} \cdot x) = \lim_n c(\text{pi} \cdot x_n) = \lim_n \cos(\pi \cdot x_n) = \cos(\pi x)$$

i analogicznie $s(\text{pi} \cdot x) = \sin(\pi x)$.

IV. Aby wykazać równość $\text{pi} = \pi$ i zakończyć dowód, skorzystamy z nierówności **SC 2** zapisanej w postaci $0 < c(z) < \frac{s(z)}{z} < 1$ dla $z \in (0, 1)$. Dla dostatecznie małych $x > 0$ otrzymujemy

$$c(\text{pi} \cdot x) < \frac{s(\text{pi} \cdot x)}{\text{pi} \cdot x} = \frac{\pi}{\text{pi}} \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} < \frac{\pi}{\text{pi}} \quad \text{oraz} \quad \cos(\pi x) < \frac{\text{pi}}{\pi}.$$

W granicy, np. dla ciągu $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, wynikają stąd nierówności

$$c(0) = 1 \leq \frac{\pi}{\text{pi}} \quad \text{i} \quad \cos(0) = 1 \leq \frac{\text{pi}}{\pi},$$

czyli $\text{pi} = \pi$, co było do okazania. \square

Udowodniona wyżej jednoznaczna, aksjomatyczna charakteryzacja pary funkcji \sin i \cos podpowiada odpowiedź na pytanie o matematyczny sens liczby π .

Definicja 6.6.1. *Liczbą π nazywamy najmniejsze dodatnie miejsce zerowe funkcji sinus.*

Rozumowanie przedstawione wyżej wykorzystuje elementy zaczerpnięte z wielu źródeł. Odmienne podejścia, zawarte np. w [5], włączają do układu *aksjomatów* zależności odwołujące się do pochodnych i nie mogły być uwzględnione w aktualnym kontekście.

6.7 Szeregi potęgowe jako funkcje

Poznaliśmy wcześniej szereg potęgowy opisujący funkcję wykładniczą e^x dla $x \in \mathbb{R}$. Ze wzoru (5.11) wynika zatem równość

$$a^x = a^{x \ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^n}{n!} x^n \quad \text{dla } a > 0. \quad (6.27)$$

Z kolei Twierdzenie 6.6.3 jednoznacznie charakteryzuje funkcje *sinus* i *kosinus* jako jedyne spełniające warunki (6.15)-(6.17). Korzystając z Wniosku 5.5.4 o iloczynie Cauchy'ego szeregów bezwzględnie zbieżnych, możemy zatem przedstawić dla każdej z tych dwu funkcji jej *rozwinięcie* w postaci szeregu potęgowego.

Twierdzenie 6.7.1 (Rozwinięcie w szereg funkcji \sin i \cos). *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{oraz} \quad (6.28)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (6.29)$$

Dowód. Z kryterium d'Alemberta (tw. 5.2.5) wynika, że oba szeregi potęgowe występujące w (6.28)–(6.29) mają nieskończony promień zbieżności i są bezwzględnie zbieżne dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zgodnie z Twierdzeniem 6.6.3 wystarczy sprawdzić, że funkcje

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

spełniają warunki **SC 1**–**SC 2**. Z Wniosku 5.5.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(x)c(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)}}{(2n-2k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} c(x)s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)+1}}{(2n-2k+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} x^{2k} y^{2n-2k+1}. \end{aligned}$$

Zatem $s(x)c(y) - c(x)s(y) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \left(\binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k} - \binom{2n+1}{2k} x^{2k} y^{2n-2k+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x-y)^{2n+1} = s(x-y). \end{aligned}$$

Sprawdzenie analogicznego warunku dla $c(x-y)$ pozostawiamy czytelnikowi.

Dla dowodu nierówności $s(x) < x$, gdy $0 < x < 1$, grupujemy – zgodnie ze Stwierdzeniem 5.1.4 – pary sąsiednich wyrazów szeregu o przeciwnych znakach, co daje

$$x - s(x) = \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right) + \left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \right) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!} \left(\frac{4k}{x} - \frac{x}{4k+1} \right) > 0$$

dla $x \in (0, 1)$. W podobny sposób szacujemy różnicę

$$\begin{aligned} s(x) - xc(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 2n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k-1)!} \left(\frac{4k-2}{x} - \frac{x}{4k+1} \right) > 0 \end{aligned}$$

dla $x \in (0, 1)$. □

Z kryterium Leibniza i nierówności (5.3) otrzymujemy

Wniosek 6.7.2. Dla $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in [-1, 1]$ zachodzą nierówności

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad i \quad \left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

□

Ćwiczenie 6.7.1. Sprawdzić nierówności

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

dla $x \in [0, 1]$ i porównać wykresy rozważanych funkcji. Wiedząc, że rozwiązaniem równania $\sin(x) = \frac{1}{2}$ jest $x = \frac{\pi}{6}$ wyznaczyć (z dokładnością do 10^{-6}) i porównać pierwiastki równań wielomianowych odpowiadających podanym wyżej sumom częściowym szeregu. Ocenąć dokładność uzyskanych przybliżeń liczby π .

Opisane wyżej przykładowe rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy dotyczyły specyficznych funkcji ciągłych. W istocie, ciągłość stanowi warunek konieczny rozwijalności funkcji w szereg potęgowy.

Twierdzenie 6.7.3 (Ciągłość sumy szeregu potęgowego). (i) Suma szeregu potęgowego $\sum a_n x^n$ o niezerowym promieniu zbieżności ρ jest funkcją ciągłą

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dla } x \in (-\rho, \rho).$$

(ii) (Twierdzenie Abela). Jeśli $\rho < \infty$ i szereg $\sum a_n x^n$ jest zbieżny w punkcie końcowym $x_0 = -\rho$ lub $x_0 = \rho$ przedziału zbieżności, to suma $f(x)$ szeregu potęgowego jest także funkcją ciągłą (jednostronnie) w x_0 .

Dowód. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Dla dowolnej liczby x_0 z przedziału $(-\rho, \rho)$ wykażemy, że funkcja f dla $|x| < \rho$ spełnia warunek Cauchy'ego (6.9) w punkcie x_0 . W tym celu ustalmy dowolną liczbę r taką, że $|x_0| < r < \rho$. Ze zbieżności szeregu $(\sum |a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ wynika istnienie liczby $m \in \mathbb{N}$ takiej, że $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k| r^k < \frac{\varepsilon}{3}$. Ponieważ wielomian $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, istnieje liczba dodatnia $\delta \leq r - |x_0|$ taka, że prawdziwa jest implikacja

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z nierówności trójkąta wynikają zatem nierówności

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| |x|^k + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| |x_0|^k \leq 2 \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned} \quad (6.30)$$

dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, a to kończy dowód własności (i).

(ii)* Zakładając zbieżność szeregu $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla $c_n = a_n x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $x_0 \in \{-\rho, \rho\}$ jest jednym z końców przedziału zbieżności szeregu potęgowego, rozważamy funkcję

$$g(t) = f(x_0 \cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

Ze zbieżności szeregu $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i Twierdzenia 5.2.1(ii) wynika istnienie liczby $m \in \mathbb{N}$ takiej, że $|\sum_{k=m}^n c_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq m$. Korzystając z nierówności Abela (5.10) otrzymujemy oszacowanie $|\sum_{k=m}^n c_k t^k| \leq \frac{\varepsilon}{3} t^m$ prawdziwe dla $t \in [0, 1]$ i dowolnego $n \geq m$, a więc także (w granicy)

$$|\sum_{k=m}^{\infty} c_k t^k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

Pozwala to na analogiczne do (6.30) oszacowanie różnicy $g(t) - g(1)$, co kończy dowód lewostronnej ciągłości g w końcu przedziału. Złożenie $f(x) = g(\frac{x}{x_0})$ jest zatem funkcją ciągłą w całym przedziale zbieżności. \square

W kolejnych rozdziałach kursu, korzystając z pojęcia *różniczkowalności*, poznamy także warunki dostateczne na to, by dana funkcja posiadała rozwinięcie w szereg potęgowy. W szczególności poznamy także rozwinięcia w szereg potęgowy większości funkcji elementarnych.

Rozdział 7

Ciągłość wg Cauchy'ego

W ramach dotychczasowego wykładu pojęcie ciągłości funkcji (w punkcie) zostało wprowadzone w Definicji 6.2.1 z wykorzystaniem ciągów zbieżnych – i było intensywnie wykorzystywane w kolejnych podrozdziałach. Jest to tzw. *definicja Heinego* ciągłości. Wstępnie poznaliśmy też podejście pochodzące od Cauchy'ego, obejmujące *własność Cauchy'ego* (6.9) i Twierdzenie 6.2.6. Planując przeniesienie uwagi czytelnika na znaczenie i możliwości tkwiące w podejściu Cauchy'ego, prezentujemy podstawową różnicę obu równoważnych koncepcji – jedna korzysta ze zbiorów domkniętych, druga – z otwartych. Czas na szczegóły.

7.1 Nieco topologii

Ciągi zbieżne są podstawą do wyróżnienia na prostej rzeczywistej \mathbb{R} zbiorów domkniętych, których szczególnym przykładem są domknięte przedziały.

Definicja 7.1.1. *Podzbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest domknięty, jeśli granica każdego ciągu zbieżnego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $x_n \in X$ dla $n \in \mathbb{N}$, również należy do zbioru X .*

A teraz spojrzenie „z drugiej strony” – obejmujące przedziały otwarte:

Definicja 7.1.2. *Dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ liczbę $x \in X$ nazywamy punktem wewnętrznym, jeśli dla pewnego $c > 0$ zbiór $(x - c, x + c)$ zawiera się w X . Zbiór $V \subset \mathbb{R}$ jest otwarty, gdy każda liczba $x \in V$ jest punktem wewnętrznym – zawiera się w V wraz z pewnym przedziałem $(x - c, x + c)$, $c > 0$, zwanym otoczeniem x w V .*

Zbiór punktów wewnętrznych dowolnego przedziału $J \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym $J^\circ \subset J$ o tych samych końcach. Przedział J° nazywać będziemy także *wnętrzem* przedziału J .

Ewentualne wątpliwości co do istnienia związku pomiędzy otwartością a domkniętością zbiorów rozwiewa

Stwierdzenie 7.1.1. *Podzbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $\mathbb{R} \setminus X$ jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathbb{R} \setminus X$ nie jest otwarty, a zatem istnieje punkt $x \notin X$ taki, że dla każdego $c > 0$ przedział $(x - c, x + c)$ nie jest podzbiorem dopełnienia $\mathbb{R} \setminus X$. Wynika stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ w przekroju $X \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ można wybrać punkt $x_n \in X$, odległy od x o mniej niż $\frac{1}{n}$. Utworzony w ten sposób ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do x , a to oznacza, że zbiór X nie jest domknięty – nie zawiera granicy ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wykazaliśmy tym samym, że z domkniętości X wynika otwartość dopełnienia. Dowód implikacji przeciwnej pozostawiamy czytelnikowi. \square

Z faktu, że część wspólna dwu otoczeń punktu jest otoczeniem, otrzymujemy

Wniosek 7.1.2. *Przekrój (część wspólna) skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, a suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest domknięta.*

Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych w \mathbb{R} jest zbiorem otwartym. Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty. \square

Nieco bardziej skomplikowane typy zbiorów, mające – jak zobaczymy w kolejnym podrozdziale – związek z ciągłością funkcji, wyróżnia

Definicja 7.1.3. *Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest typu G_δ , jeśli jest przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych. X jest typu F_σ , jeśli jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych.*

Oczywiście, dopełnienia zbioru typu G_δ jest zbiorem typu F_σ i odwrotnie.

Ćwiczenie 7.1.1. Sprawdzić, że każdy przedział (otwarty, domknięty, otwarto-domknięty, zbiór jednopunktowy) jest jednocześnie typu G_δ i typu F_σ .

Uwaga 7.1.1. Rodzinę $\tau_{\mathbb{R}}$ wszystkich podzbiorów otwartych prostej rzeczywistej \mathbb{R} nazywamy *naturalną topologią* w \mathbb{R} – stąd nazwa bieżącego podrozdziału. Oprócz zbiorów otwartych, wyróżnione wyżej zbiory domknięte

oraz zbiory G_δ i zbiory F_σ wchodzą w skład rodziny $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ zbiorów borelowskich (Definicja 11.1.3), obejmującej praktycznie wszystkie *konstruowalne* podzbiory w \mathbb{R} , czyli możliwe do uzyskania w wyniku przeliczalnej liczby operacji mnogościowych.

Zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych jest typu F_σ , gdyż jest przeliczalną sumą zbiorów jednopunktowych. Jako ważny, nieoczywisty fakt, wykażemy teraz

Twierdzenie 7.1.3 (Zbiór \mathbb{Q} nie jest G_δ). *Nie istnieje ciąg zbiorów otwartych w \mathbb{R} , których przekrojem byłby zbiór \mathbb{Q} wszystkich liczb wymiernych.*

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg zbiorów otwartych $U_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, zawierających zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} , oraz ciąg liczbowy $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożony ze wszystkich liczb wymiernych. Wykażemy, że przekrój zbiorów otwartych $V_n = U_n \setminus \{q_n\}$, dla $n \in \mathbb{N}$, jest niepusty, co oznacza, że przekrój $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ jest (zawsze) istotnie większy niż zbiór \mathbb{Q} .

Korzystamy z faktu, że każdy niepusty przedział otwarty zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych, a zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych liczb $a < b$ przekrój

$$(a, b) \cap V_n \supset (a, b) \cap \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$$

jest zbiorem niepustym. Ponieważ jest to zbiór otwarty, zawiera niepusty przedział otwarty oraz np. o połowę mniejszy przedział domknięty. Wychoząc od dowolnych ustalonych $a < b$ możemy zatem wskazać liczby $a_1 < b_1$ takie, że

$$[a_1, b_1] \subset (a, b) \cap V_1.$$

Założmy, że wybraliśmy już zstępujący ciąg przedziałów domkniętych

$$[a_k, b_k] \subset (a, b) \cap V_1 \cap \dots \cap V_k, \quad (7.1)$$

gdzie $a_k < b_k$ dla $k < n$ i pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$. Korzystając z zasady indukcji i wybierając liczby $a_n < b_n$ w ten sposób, by przedział domknięty $[a_n, b_n]$ zawierał się w przekroju $(a_{n-1}, b_{n-1}) \cap V_n$, uzyskujemy nieskończony, zstępujący ciąg przedziałów spełniających warunek (7.1).

Niejako „przy okazji” otrzymaliśmy dwa ograniczone ciągi monotoniczne, rosnący ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i malejący $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, których prawie wszystkie wyrazy, a więc także granice, odpowiednio α i β , zawierają się w każdym z wyróżnionych przedziałów domkniętych. Stąd inkluzja

$$[\alpha, \beta] \subset (a, b) \cap V_1 \cap \dots \cap V_n \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N},$$

a ponieważ przekrój zbiorów V_n nie zawiera liczb wymiernych, oba ciągi mają tę samą granicę $\alpha = \beta$. Wykazaliśmy nie tylko, że przekrój $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ jest niepusty, ale także, że jest *gęsty* – zawiera punkty każdego otwartego przedziału na prostej. \square

Udowodniona wyżej własność prostej \mathbb{R} jest szczególnym przypadkiem tzw. Twierdzenia Baire’a o kategoriach, prezentowanego w ramach kursu Topologii Metrycznej.

Strukturę dowolnego zbioru otwartego na prostej \mathbb{R} wyjaśnia

Twierdzenie 7.1.4 (O zbiorach otwartych w \mathbb{R}). *Każdy zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej liczby rozłącznych przedziałów otwartych.*

Dowód. Dla dowodu skorzystamy z charakteryzacji przedziałów zawartej w Twierdzeniu 2.1.5. Dla dowolnego punktu $x \in V$ zauważmy, że suma

$$V_x = \bigcup \{(a, b) \subset V; x \in (a, b)\}$$

wszystkich przedziałów otwartych zawartych w V i zawierających x jest maksymalnym przedziałem otwartym o tej własności. Istotnie, dla dowolnych dwu liczb $c < d$ w V_x istnieją zawierające x przedziały (a_i, b_i) , $i = 1, 2$, takie, że $c \in (a_1, b_1)$ i $d \in (a_2, b_2)$. Wówczas przedział (a, b) o końcach $a = \min\{a_1, a_2\}$ i $b = \max\{b_1, b_2\}$ zawiera $[c, d]$, a ponieważ jest sumą przedziałów (a_i, b_i) , $i = 1, 2$, zawiera się w zbiorze V_x . Zgodnie z cytowanym twierdzeniem, V_x jest przedziałem – otwartym, jako suma zbiorów otwartych, maksymalnym – z konstrukcji. Z maksymalności zbioru V_x , dla każdego $x \in V$, wynika z kolei własność

$$V_x \cap V_y \neq \emptyset \implies V_x = V_y \quad \text{dla } x, y \in V,$$

przy czym $V = \bigcup_{x \in V} V_x$. Wystarczy teraz w każdym ze zbiorów rodziny $\mathcal{V} = \{V_x; x \in V\}$ wybrać liczbę wymierną (Wniosek 1.3.2), aby stwierdzić, że zbiór \mathcal{V} jest co najwyżej przeliczalny. \square

Uwaga 7.1.2. Prosty przykład $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ pokazuje, że przedziały składające się na dany zbiór otwarty nie zawsze można ponumerować zgodnie z ich naturalną kolejnością na prostej.

Sumy zbiorów otwartych, niekoniecznie rozłącznych, pojawiają się często w *Analizie* w kontekście *pokryć*, w sytuacji, gdy każdy element danego zbioru X posiada otoczenie o specyficznej własności.

Definicja 7.1.4. Rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U} \subset \tau_{\mathbb{R}}$ stanowi pokrycie (dokł. pokrycie otwarte) zbioru $X \subset \mathbb{R}$, jeśli $X \subset \bigcup \mathcal{U} \equiv \bigcup \{U; U \in \mathcal{U}\}$.

Twierdzenie 7.1.5 (Heine'go–Borela). Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym i ograniczonym. Wówczas każde pokrycie otwarte $\mathcal{U} \subset \tau_{\mathbb{R}}$ zbioru X zawiera skończony podzbiór $\{U_1, \dots, U_n\}$, czyli skończone podpokrycie takie, że $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Dowód. Rozważmy na początek przypadek, gdy $X = [a, b]$ jest ograniczonym przedziałem domkniętym, a \mathcal{U} jego dowolnym otwartym pokryciem. Zbiór Y złożony z tych punktów $x \in [a, b]$, dla których przedział $[a, x]$ ma skończone podpokrycie w \mathcal{U} , zawiera a i, jako niepusty, posiada kres górny $c = \sup Y \leq b$. Dla punktu c istnieje zawierający go zbiór $U \in \mathcal{U}$ – otwarty, a więc taki, że $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Z definicji c jako kresu górnego wynika istnienie w przedziale $(c - \varepsilon, c]$ liczby $x \in Y$, dla której przedział $[a, x]$ posiada skończone podpokrycie zbiorami $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. Wynika stąd skończone podpokrycie

$$[a, c + \varepsilon) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U$$

i przypuszczenie, że $c < b$ prowadziło do sprzeczności postaci $c < \sup Y$. Zatem $c = b$ i cały przedział $[a, b]$ ma podpokrycie $\{U_1, \dots, U_n, U\} \subset \mathcal{U}$.

Jeśli teraz zbiór X jest dowolnym zbiorem domkniętym i ograniczonym, a więc zawartym w pewnym przedziale $[a, b]$, to każde pokrycie otwarte \mathcal{U} zbioru X rozszerza się do rodziny $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R} \setminus X\}$ będącej otwartym pokryciem przedziału $[a, b]$. Zgodnie z udowodnionym już przypadkiem szczególnym twierdzenia, istnieje skończony podzbiór $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, taki że

$$[a, b] \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \cup (\mathbb{R} \setminus X).$$

Stąd otrzymujemy $X \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$. □

Twierdzenie Heinego–Borela bywa uważane za równoważne sformułowanemu we Wniosku 4.3.2 twierdzeniu Bolzano–Weierstrassa.

Ćwiczenie 7.1.2. Korzystając z Twierdzenia 7.1.4(ii) zredukować pokrycie \mathcal{U} do przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych $\{U_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}$. Zakładając, że żadna z sum $U_1 \cup \dots \cup U_n$ nie pokrywa X , przedstawić alternatywny dowód Twierdzenia 7.1.5.

7.2 Punkty nieciągłości

Przechodząc do badania *nieciągłości* funkcji zmiennej rzeczywistej, skorzystamy z warunku Cauchy'ego (6.9). Zaprzeczenie tego warunku, a więc brak ciągłości funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x \in X$, wyróżnia x jako *punkt nieciągłości* funkcji. Oznacza to własność

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y |x - y| < \delta \text{ i } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \quad (7.2)$$

i stanowi podstawę do pomiaru ewentualnego „stopnia nieciągłości” funkcji.

Definicja 7.2.1. Dla dowolnej funkcji zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego $x \in X$ wielkość

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup \{|f(y) - f(z)|; y, z \in X \cap (x - \delta, x + \delta)\} \quad (7.3)$$

nazywamy oscylacją funkcji f w punkcie x .

Ćwiczenie 7.2.1. Wyznaczyć oscylację funkcji sgn w punkcie $x = 0$.

Twierdzenie 7.2.1. Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją zmiennej rzeczywistej.

- (i) Funkcja f jest ciągła w $x \in X \iff \omega_f(x) = 0$.
- (ii) Jeśli dziedzina X funkcji f jest przedziałem, to zbiór N_f wszystkich punktów nieciągłości funkcji f jest typu F_σ , tzn. jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych.

Dowód. Jeśli funkcja f ma w punkcie $x \in X$ oscylację $\omega_f(x) = 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\sup \{|f(y) - f(z)|; y, z \in X \cap (x - \delta, x + \delta)\} < \varepsilon.$$

W szczególności, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, jeśli tylko $|x - y| < \delta$, a więc funkcja f jest ciągła w x . Jeśli natomiast oscylacja funkcji f w x jest dodatnia (lub nieskończona) i $\omega_f(x) > c > 0$, to dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieją $y, z \in X \cap (x - \delta, x + \delta)$ takie, że $|f(y) - f(z)| > c$. Nierówność trójkąta

$$|f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| \geq |f(y) - f(z)| > c$$

wyklucza możliwość, by oba składniki $|f(y) - f(x)|$ i $|f(x) - f(z)|$ były mniejsze niż $\frac{c}{2}$. Tym samym spełniony jest warunek nieciągłości (7.2) dla $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$.

Dla dowodu (ii) rozważmy najpierw przypadek $X = \mathbb{R}$, gdy dziedziną funkcji f jest cała prosta rzeczywista. Wystarczy wykazać, że każdy ze zbiorów $D_n = \{x; \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, jest w tym przypadku domknięty lub – że jego dopełnienie jest zbiorem otwartym. Załóżmy zatem, że liczba x_0 spełniająca warunek $\omega_f(x_0) < \frac{1}{n}$ jest dowolnym punktem dopełnienia $\mathbb{R} \setminus D_n$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Zgodnie z (7.3) istnieją liczby $\delta, c > 0$ takie, że

$$|f(y) - f(z)| \leq c < \frac{1}{n} \quad \text{dla wszystkich } y, z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ponieważ dla każdej liczby x z przedziału $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$ zachodzi inkluzja

$$(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

otrzymujemy stąd $\sup \{|f(y) - f(z)|; y, z \in (x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2})\} \leq c$, a więc

$$\omega_f(x) \leq c < \frac{1}{n} \quad \text{dla } x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}).$$

Zatem $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}) \subset \mathbb{R} \setminus D_n$, a to dowodzi otwartości dopełnienia zbioru D_n .

W ogólnym przypadku, gdy X jest przedziałem, niech $J \supset X$ będzie przedziałem domkniętym o tych samych końcach. Jeśli rozszerzyć f do funkcji $f^c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równej 0 poza X , to poza J funkcja f^c jest ciągła, a jej pełen zbiór punktów nieciągłości N_{f^c} jest zbiorem F_σ równym $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset J$. Jak wiemy, ciągłość funkcji f^c w jakimś punkcie pociąga za sobą ciągłość $f = f^c|_X$. Wynika stąd inkluzja $N_f \subset N_{f^c}$ dla zbioru $N_f \subset X$ punktów nieciągłości funkcji f , przy czym różnica ogranicza się ewentualnie do końców przedziału J . Pozostaje zauważyć, że usunięcie ze zbioru N_{f^c} pojedynczego punktu lub pary punktów daje zbiór F_σ , co wynika z przedstawionego niżej lematu. \square

Lemat 7.2.2. *Różnica dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ typu F_σ i zbioru jednopunktowego $\{x\}$ jest zbiorem F_σ .*

Dowód. Ponieważ $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$, dla zbiorów domkniętych A_n , $n \in \mathbb{N}$, dających w sumie zbiór A zachodzi równość

$$A_n \setminus \{x\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_n \setminus (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a zatem zbiór $A \setminus \{x\}$ jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych postaci $A_n \setminus (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ dla $n, k \in \mathbb{N}$. \square

Z Twierdzenia 7.1.3 wynika

Wniosek 7.2.3. *Nie istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla której punkty nieciągłości tworzą zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.* \square

Funkcje, dla których zbiór punktów nieciągłości jest równy \mathbb{Q} , czy też jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, pojawiają się w kolejnym podrozdziale i w Przykładzie 7.5.1.

Uwaga 7.2.1. W dalszym ciągu kursu będziemy się stopniowo ograniczać do badania funkcji zmiennej rzeczywistej określonych na dowolnym przedziale w \mathbb{R} . Ograniczenie to jest pozorne, skoro dla każdej funkcji zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ możemy rozważać jej *standardowe rozszerzenie*

$$f^c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{gdzie} \quad f^c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in X \\ 0 & \text{dla } x \notin X. \end{cases} \quad (7.4)$$

Badając tak rozszerzoną funkcję nie tracimy własności oryginału, a unikamy „zaskoczeń” takich jak ciągłość funkcji $x \mapsto \frac{1}{x}$ – por. Przykład 6.2.2 – czy też funkcji *tangens*. Dopiero próba rozszerzenia funkcji poza jej naturalną dziedzinę ujawnia intuicyjnie postrzeganą nieciągłość. Jeśli dziedzina X funkcji f jest zbiorem ograniczonym zawartym w przedziale J , za standardowe rozszerzenie będziemy uważać także funkcję $f^c|_J$, co pozwala ograniczać badanie własności f do dowolnego przedziału poza którym „nie dzieje się nic ciekawego”.

7.3 Granice funkcji

Niewielka modyfikacja warunków Cauchy’ego (6.10)–(6.11) prowadzi do ważnych pojęć granic prawo– i lewostronnych, zwanych ogólnie jednostronnymi – w punkcie niekoniecznie należącym do dziedziny.

Definicja 7.3.1. *Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą prawostronną funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $t \in \mathbb{R}$ takim, że zbiór X zawiera przedział $(t, t+c)$ dla pewnego $c > 0$, jeśli spełniony jest warunek*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (t < x < t + \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon). \quad (7.5)$$

Jeśli X zawiera przedział $(t-c, t)$ dla pewnego $c > 0$, spełnienie warunku

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (t - \delta < x < t \implies |f(x) - g| < \varepsilon) \quad (7.6)$$

oznacza, że g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie t .

Granice jednostronne funkcji f w punkcie $t \in \mathbb{R}$, jeśli istnieją, oznaczamy odpowiednio

$$f(t^+) \equiv \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \quad \text{ i } \quad f(t^-) \equiv \lim_{x \rightarrow t^-} f(x), \quad (7.7)$$

gdzie znak \pm określa z której strony zmienna $x \in X$ dąży do t .

Definicja 7.3.2. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $t \in \mathbb{R}$, jeśli istnieją obie granice jednostronne i zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = g = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x).$$

Wniosek 7.3.1. Jeśli dla pewnego $c > 0$ przedziały $(t - c, t)$ i $(t, t + c)$ zawierają się w dziedzinie funkcji f , to granica funkcji $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ istnieje i jest równa $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq t (t - \delta < x < t + \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon). \quad \square$$

Wniosek 7.3.2. (i) Funkcja f określona na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie wewnętrznym $t \in J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = f(t)$.

(ii) Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie $t \in J$, jeśli t nie jest prawym końcem przedziału i $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t)$; funkcja jest lewostronnie ciągła w t , gdy t nie jest lewym końcem przedziału i $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = f(t)$.

Dowód. Ćwiczenie. Dowód wymaga przypomnienia Definicji 6.2.2 i Wniosku 6.2.7, oraz porównania warunków (6.10)–(6.11) ze składającymi się na definicję granic jednostronnych warunkami (7.5)–(7.6). Minimalny poziom zrozumienia tematu, oczekiwany od czytelnika przekraczającego właśnie setną stronę skryptu, powinien pozwolić na samodzielne uzasadnienie każdej z tez dowodzonego wniosku. \square

Przykład 7.3.1. Dla funkcji sgn obie granice jednostronne w $x_0 = 0$ istnieją i

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1.$$

Zmieniając wartość $\text{sgn}(0) = 0$ na ± 1 można otrzymać funkcję prawo- lub lewostronnie ciągłą. Żadna zmiana wartości funkcji w 0 nie usuwa nieciągłości, której przyczyną jest brak wspólnej wartości granic jednostronnych.

Funkcja Dirichleta $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (7.8)$$

nie ma żadnej z granic jednostronnych.

O ile w poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się charakteryzacją całości zbioru N_f punktów nieciągłości dowolnej funkcji f , najbliższym naszym celem jest rozpoznanie możliwości wprowadzenia naturalnej *korekty* funkcji i rozszerzenia f do funkcji ciągłej – przynajmniej jednostronnie.

Przykład 7.3.2. Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Istotnie, funkcja $\frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \neq 0$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a z własności (6.17) wynikają nierówności $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zatem

$$0 < 1 - \frac{\sin(x)}{x} < 1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{x^2}{2}$$

dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Istnienie granicy w $x = 0$ oznacza, że badana funkcja posiada jednoznaczne rozszerzenie do funkcji ciągłej na \mathbb{R} . Fakt ten wynika także z rozwinięcia funkcji *sinus* w szereg, co daje

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Ćwiczenie 7.3.1. Wykazać, że dla każdej pary liczb naturalnych m i n funkcja $\frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ dla $x \notin \{-1, 1\}$ ma granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}.$$

Rozstrzygnąć problem istnienia granicy w punkcie $x = -1$.

Za granice jednostronne wypada także uznać *granice w nieskończoności*.

Definicja 7.3.3. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ w nieskończoności ∞ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$, jeśli zbiór X zawiera przedział (c, ∞) dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ i spełniony jest warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x (M < x \implies |f(x) - g| < \varepsilon). \quad (7.9)$$

Jeśli X zawiera przedział $(-\infty, c)$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, spełnienie warunku

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{R} \forall x (x < m \implies |f(x) - g| < \varepsilon) \quad (7.10)$$

oznacza, że g jest granicą funkcji f w minus nieskończoności $-\infty$, co zapisujemy jako $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$,

Oczywiście – żadna ze zdefiniowanych wyżej granic nie zależy od występującej w definicji liczby c .

Decyzja, by do opisu granic funkcji wybrać postać Cauchy’ego stosownych definicji nie oznacza, że zamierzamy całkowicie zrezygnować z podejścia ciągowego, rozwijanego we wcześniejszych rozdziałach skryptu. Świadczy o tym

Stwierdzenie 7.3.3 (Równoważność definicji Cauchy'ego i Heinego dla granic). *Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją zmiennej rzeczywistej.*

(i) *Jeśli $X \supset (t, t + c)$ dla pewnego $c > 0$, to $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy równość $\lim_n f(x_n) = g$ zachodzi dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w zbiorze $\{x \in X; t < x\}$ zbieżnego do t , czyli*

$$(7.5) \iff (\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n > t \text{ i } \lim_n x_n = t \implies \lim_n f(x_n) = g).$$

(ii) *Jeśli $X \supset (t - c, t)$ dla pewnego $c > 0$, to $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy równość $\lim_n f(x_n) = g$ zachodzi dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w zbiorze $\{x \in X; x < t\}$ zbieżnego do t , czyli*

$$(7.6) \iff (\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n < t \text{ i } \lim_n x_n = t \implies \lim_n f(x_n) = g).$$

(iii) *Jeśli $X \supset (c, \infty)$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy równość $\lim_n f(x_n) = g$ zachodzi dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X rozbieżnego do ∞ , czyli*

$$(7.9) \iff (\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in X \text{ i } \lim_n x_n = \infty \implies \lim_n f(x_n) = g).$$

(iv) *Jeśli $X \supset (-\infty, c)$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy równość $\lim_n f(x_n) = g$ zachodzi dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X rozbieżnego do $-\infty$, czyli*

$$(7.10) \iff (\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in X \text{ i } \lim_n x_n = -\infty \implies \lim_n f(x_n) = g).$$

Dowód. Ograniczamy się do przypadku (iii), czyli do charakteryzacji granicy funkcji w ∞ .

\implies Załóżmy, że istnieje granica $g = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ i rozważmy w X dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rozbieżny do ∞ . Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z założenia o istnieniu granicy funkcji wynika, że istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$ taka, że dla $x > M$ zachodzi nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$. Zgodnie z (4.11), istnieje indeks $m \in \mathbb{N}$ taki, że $x_n > M$, a więc także $|f(x_n) - g| < \varepsilon$, dla wszystkich $n \geq m$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza to zbieżność $\lim_n f(x_n) = g$.

\impliedby Dowód nie wprost. Zaprzeczenie warunku (7.9) oznacza, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$, w szczególności dla $M = n \in \mathbb{N}$, w zbiorze X można wskazać liczbę $x_n > n$, dla której $|f(x_n) - g| \geq \varepsilon$. Wnioskujemy stąd, że $x_n \rightarrow \infty$, natomiast $f(x_n) \nrightarrow g$.

Dowód pozostałych równoważności przebiega według tego samego schematu, przy czym specyfika przypadków (i)–(ii) zastała już wcześniej zawarta w dowodzie Twierdzenia 6.2.6. Uzupełnienie brakujących szczegółów pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Pomocniczy charakter ma także kolejne twierdzenie, które częściowo upraszcza problem istnienia i sposób obliczania granic w nieskończoności.

Lemat 7.3.4. *Dla dowolnej funkcji $f: (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczb a, b zachodzą równości*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(ax + b), & \text{jeśli } a > 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(ax + b), & \text{jeśli } a < 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right), & \end{cases} \quad \text{oraz}$$

przy czym granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje każda z pozostałych granic.

Dowód. Proste ćwiczenie. W przypadku ostatniej tożsamości zauważamy, że funkcja $f(\frac{1}{t})$ jest określona dla $0 < t < \max\{c, 1\}^{-1}$. Warunek $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla $x > M > 0$ jest wówczas równoważny warunkowi $|f(\frac{1}{t}) - g| < \varepsilon$ dla $0 < t < \frac{1}{M}$. \square

Wniosek 7.3.5. (i) *Dla dowolnej liczby $a > 1$ istnieją granice*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} a^{-\frac{1}{x}} = 0. \quad (7.11)$$

(ii) *Jeśli $a > 0$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} = 0$.*

Dowód. Funkcja a^{-x} dla $x \in \mathbb{R}$ jest malejąca, jeśli $a > 1$. Z nierówności $x \geq [x]$ wynika zatem $0 < a^{-x} < a^{-[x]}$ – i warunek Cauchy’ego (7.9) zbieżności funkcji $a^{-x} \rightarrow 0$ wynika z Wniosku 4.2.3(i). Istotnie, jeśli $\varepsilon > 0$ i $m \in \mathbb{N}$ są takie, że $a^{-n} < \varepsilon$ dla $n \geq m$, to dla wszystkich $x \geq m$ zachodzą także nierówności $[x] \geq m$ i $0 < a^{-x} < \varepsilon$. Pozostałe granice składające się na własność (i) wynikają z Lematu 7.3.4.

Dowód własności (ii) przebiega analogicznie i korzysta z Wniosku 4.2.3(ii) oraz monotoniczności funkcji potęgowej. \square

Z Twierdzenia 4.3.8 otrzymujemy

Wniosek 7.3.6. *Zachodzą równości*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (7.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}. \quad (7.13)$$

Dowód. Wyjaśnienia wymaga jedynie druga z równości (7.12), otrzymana z (7.13) w wyniku zastąpienia $x \rightarrow \infty$ przez $-x \rightarrow -\infty$. \square

Twierdzenie 7.3.7. Funkcja $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ dla $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ ma granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (7.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1. \quad (7.15)$$

Tym samym wskazaną wyżej funkcję można (jednoznacznie) rozszerzyć do funkcji ciągłej na przedziale $(-1, \infty)$. Stąd także

Wniosek 7.3.8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = 1.$ □

Dowód Twierdzenia 7.3.7. Z Lematu 7.3.4 i (7.12) wynikają równości

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

co dowodzi istnienia granicy w $x = 0$. Dla zbadania granicy w ∞ oznaczmy przez $n_x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ część całkowitą dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$. Z nierówności $n_x \leq x < n_x + 1$ wynika oszacowanie

$$1 < (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq (1+x)^{\frac{1}{n_x}} < \sqrt[n_x]{2+n_x} \quad \text{dla } x > 0. \quad (7.16)$$

Przyjmując $\sqrt[n_x]{2+n_x} = 1+a$, podobnie jak w Przykładzie 3.5.4, otrzymujemy nierówności $2+n_x = (1+a)^{n_x} \geq 1 + \binom{n_x}{2}a^2$. Stąd

$$n_x + 1 \geq \frac{n_x(n_x-1)}{2}a^2 > \frac{(n_x+1)(n_x-2)}{2}a^2 \geq \frac{(n_x+1)(x-2)}{2}a^2,$$

a zatem $a^2 < \frac{2}{x-2}$ dla $x > 2$, co sprowadza nierówność (7.16) do postaci

$$0 < (1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 < \sqrt{\frac{2}{x-2}} < \varepsilon,$$

jeśli tylko $x > 2 + \frac{2}{\varepsilon^2}$ – dla dowolnego $\varepsilon > 0$. □

Ćwiczenie 7.3.2. Sformułować i wykazać podstawowe własności granic funkcji zmiennej rzeczywistej analogiczne do zawartych w Twierdzeniu 6.2.2.

7.4 Granice niewłaściwe i asymptoty

Uogólniając Definicje 7.3.1–7.3.2, przyjmujemy

Definicja 7.4.1. Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie t takim, że zbiór X zawiera przedział $(t, t+c)$ dla pewnego $c > 0$, granicę prawostronną niewłaściwą równą ∞ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = \infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in X (t < x < t + \delta \implies f(x) > M). \quad (7.17)$$

Jeśli X zawiera przedział $(t-c, t)$ dla pewnego $c > 0$, spełnienie warunku

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in X (t - \delta < x < t \implies f(x) > M) \quad (7.18)$$

oznacza, że funkcja f ma w punkcie $t \in X$ granicą lewostronną niewłaściwą równą ∞ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \infty$.

Granica niewłaściwa prawo- lub lewostronna funkcji f równa jest $-\infty$, jeśli ∞ jest odpowiednią granicą niewłaściwą funkcji $-f$.

Ćwiczenie 7.4.1. Sformułować warunki typu Heinego charakteryzujące istnienie granic niewłaściwych poprzez ciągi, oraz wykazać ich równoważność z warunkami typu Cauchy'ego podanymi w definicji.

Zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją, jeśli X zawiera podzbiór postaci $(t-c, t) \cup (t, t+c)$ dla pewnego $c > 0$, przyjmujemy

Definicja 7.4.2. Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $t \in \mathbb{R}$, granicę niewłaściwą $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = \pm\infty$ (tzn. $+\infty$ lub $-\infty$), jeśli istnieją i są równe obie jednostronne granice niewłaściwe

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = \pm\infty.$$

Wniosek 7.4.1. Jeśli dla pewnego $c > 0$ dziedzina X funkcji f zawiera przedziały $(t-c, t)$ i $(t, t+c)$, to granica niewłaściwa funkcji $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ istnieje i jest równa ∞ , wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq t (t - \delta < x < t + \delta \implies f(x) > M).$$

□

Przykład 7.4.1. Klasyczny przykład granic niewłaściwych pochodzi od funkcji $f(x) = \frac{1}{x^n}$, dla $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. W zależności od parzystości wykładnika mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} &= \infty, \quad \text{oraz} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} &= -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = \infty. \end{aligned}$$

W trakcie wyznaczania granic niewłaściwych możemy korzystać z wszelkich, znanych i stosowanych dla ciągów, metod upraszczających obliczanie granic. Zachęcając czytelnika do przypomnienia i sformułowania poznanych reguł w wersji właściwej dla granic funkcji, proponujemy

Stwierdzenie 7.4.2. Dla dowolnej funkcji zmiennej rzeczywistej f i dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} f(t+c) \quad i \quad \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} f(t-c), \quad (7.19)$$

obejmujące zarówno granice skończone jak i granice niewłaściwe. W każdej z równości istnienie dowolnej ze stron jest równoważne istnieniu drugiej i pociąga za sobą równość granic. \square

Tożsamości (7.19) stanowią dodatkowe uzasadnienie dla wprowadzonych w (7.7) skróconych oznaczeń granic postaci $f(t^+)$ i $f(t^-)$.

Przykład 7.4.2. Wnioski 7.3.6–7.3.8 możemy teraz uzupełnić o kolejną, ostatnią już granicę niewłaściwą

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty. \quad (7.20)$$

Istotnie, zgodnie ze Stwierdzeniem 7.4.2 rozważana granica jest równa

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{-1-c}\right)^{-1-c} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{c}{1+c}\right)^{-(1+c)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{1+c} \\ &\geq \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{c}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Stosunkowo najmniej interesujące zachowanie funkcji opisują granice niewłaściwe w nieskończoności.

Definicja 7.4.3. Funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, której dziedzina X zawiera przedział (c, ∞) dla pewnego $c > 0$, ma w nieskończoności ∞ granicę niewłaściwą równą ∞ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in X (x > N \implies f(x) > M). \quad (7.21)$$

Jeśli X zawiera przedział $(-\infty, c)$ dla pewnego $c > 0$, spełnienie warunku

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in X (x < N \implies f(x) > M) \quad (7.22)$$

oznacza, że funkcja f ma w $-\infty$ granicę niewłaściwą równą ∞ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Granica niewłaściwa funkcji f w plus lub minus nieskończoności równa jest $-\infty$, jeśli ∞ jest odpowiednią granicą niewłaściwą funkcji $-f$.

Ćwiczenie 7.4.2. Sprawdzić, że metody przekształcania granic stanowiące tezę Lematu 7.3.4 mają zastosowanie (tzn. są prawdziwe) także dla granic niewłaściwych.

Przykład 7.4.3. Wartości graniczne dowolnych funkcji wymiernych postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dla $x \in \mathbb{R} \setminus Q^{-1}\{0\}$, znamy w wersji *ciągowej* – dla ciągu $(\frac{P(n)}{Q(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Metody i przekształcenia wykorzystane w Przykładach 3.5.2 i 4.2.1 pozostają w mocy, dzięki czemu – w zależności od stopni wielomianów P i Q – otrzymujemy granice niewłaściwe funkcji

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k < l \\ \frac{b_k}{c_l}, & \text{gdy } k = l \\ \operatorname{sgn}(\frac{b_k}{c_l}) \cdot \infty, & \text{gdy } k > l, \end{cases} \quad (7.23)$$

gdzie $k = \deg P \geq 0$ i $l = \deg Q \geq 0$, natomiast b_k i c_l są współczynnikami przy najwyższych potęgach zmiennej x w każdym z wielomianów.

Granice niewłaściwe i poznane wcześniej granice funkcji w nieskończoności łączy wspólna interpretacja geometryczna.

Definicja 7.4.4. (i) Prostą $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, nazywamy asymptotą poziomą funkcji f , jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

(ii) Prostą $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, nazywamy asymptotą pionową funkcji f , jeśli spełniony jest przynajmniej jeden z warunków

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty.$$

(iii) Prosta o równaniu $y = ax + b$, $a \neq 0$, dla $x \in \mathbb{R}$ jest asymptotą ukośną funkcji f , jeśli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Asymptotyczne własności funkcji o nieograniczonej dziedzinie mogą być odmienne w $+\infty$ i w $-\infty$. Bardziej precyzyjna terminologia pozwala mówić – w zgodzie z Definicją 7.4.4 – o asymptocie (poziomej albo ukośnej) w $+\infty$ oraz w $-\infty$. Znajdywanie asymptot ukośnych ułatwia

Stwierdzenie 7.4.3. Funkcja rzeczywista f określona na przedziale (c, ∞) , dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, ma asymptotę ukośną w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \quad \text{i} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax). \quad (7.24)$$

Jeśli obie granice istnieją, asymptotę ukośną (w ∞) jest prosta o równaniu $y = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

Istnienie analogicznych granic w $-\infty$ jest równoważne istnieniu asymptoty ukośnej w $-\infty$.

Dowód. Dla danej liczby $a \neq 0$, istnienie drugiej z granic (7.24) pociąga za sobą równość $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$, a ta oznacza istnienie asymptoty. Z drugiej strony, jeśli założymy, że prosta $y = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ , to istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x} \right) = 0 + a + 0,$$

pozwalająca wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej. Wówczas współczynnik b wyznaczamy jako granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

Przypadek asymptoty i granic w $-\infty$ jest w pełni analogiczny. \square

Przykład 7.4.4. Dla funkcji $\sqrt{x^2 + x + 1} + x$, $x \in \mathbb{R}$, wyznaczamy granice w nieskończoności. Otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty,$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x|(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Badana funkcja ma zatem asymptotę poziomą $y = -\frac{1}{2}$ w $-\infty$, natomiast rozstrzygnięcie, czy ma też asymptotę ukośną, wymaga obliczenia granic

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = 2,$$

oraz

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że prosta o równaniu $y = 2x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną badanej funkcji w $+\infty$.

Ćwiczenie 7.4.3. Z pomocą np. Maximy lub Maple sporządzić wykres zawierający obok badanej funkcji także obie znalezione asymptoty.

Wniosek 7.4.4. Dla dowolnych wielomianów P i Q stopni $k = \deg P$ i $l = \deg Q$ funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dla $x \notin Q^{-1}\{0\}$, ma asymptotę ukośną (obustronną – w $\pm\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy $k = l + 1$. Współczynniki $a, b \in \mathbb{R}$ asymptoty są jedyną parą liczb, dla których zachodzi tożsamość

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.25)$$

gdzie R jest wielomianem stopnia mniejszego niż l .

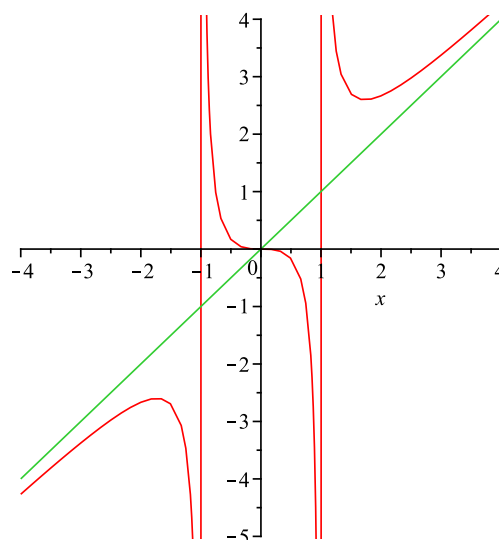
Dowód. Z równości (7.23) wynika, że granica

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)}$$

jest skończona tylko wtedy, gdy $k \leq l + 1$, a jest różna od 0 i równa $\frac{b_k}{c_l}$, wyłącznie w przypadku, gdy $k = l + 1$. W takim przypadku rozkład (7.25) wynika ze znanego z Algebry algorytmu dzielenia wielomianów. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0,$$

co dowodzi, że, część liniowa ilorazu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ opisuje równanie dwustronnej asymptoty ukośnej. \square



Rysunek 7.1: Asymptoty pionowe i ukośne

Przykład 7.4.5. Funkcja $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$ dla $x \neq \pm 1$ (Rys. 7.1) ma asymptotę ukośną $y = x$ i dwie asymptoty pionowe $x = -1$ i $x = 1$.

7.5 Funkcje monotoniczne

W bieżącym podrozdziale skupiamy się na granicach funkcji monotonicznych, których wyznaczanie ułatwia

Lemat 7.5.1. *Dla dowolnej funkcji niemalejącej f określonej na przedziale otwartym $(a, b) \subset \mathbb{R}$ zachodzą równości*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf f[(a, b)] \quad i \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f[(a, b)]. \quad (7.26)$$

Jeśli funkcja f jest nierosnąca, to

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup f[(a, b)] \quad i \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf f[(a, b)]. \quad (7.27)$$

Dowód. Jeśli $m \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru $f[(a, b)]$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ w przedziale (a, b) istnieje liczba x_ε taka, że $m \leq f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon$. Wynikająca stąd implikacja

$$a < x < x_\varepsilon \implies 0 \leq f(x) - m < \varepsilon$$

dowodzi, że m jest granicą prawostronną f w punkcie a .

W przypadku, gdy $\inf f[(a, b)] = -\infty$, dla każdego $m \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $x_m \in (a, b)$, taka że $f(x_m) < m$. Analogiczna do powyższej implikacja

$$a < x < x_m \implies f(x) < m$$

dowodzi, że granicą prawostronną f w punkcie a jest $-\infty$.

Dowód analogicznych równości dla granicy lewostronnej w b pozostawiamy czytelnikowi. Z kolei przypadek funkcji nierosnącej sprowadza do poprzedniego zastąpienie funkcji f przez $-f$. \square

Twierdzenie 7.5.2. *Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją niemalejącą określoną na przedziale $J \subset \mathbb{R}$.*

(i) *W każdym punkcie wewnętrznym $t \in J$ istnieją obie granice jednostronne, przy czym*

$$f(x_1) \leq \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \leq f(t) \leq \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \leq f(x_2) \quad (7.28)$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in J$ takich, że $x_1 < t < x_2$. W każdym z należących do J końców przedziału zachodzi analogiczna nierówność pomiędzy $f(t)$ i odpowiednią granicą jednostronną.

(ii) *Funkcja f ma co najwyżej przeliczalną liczbę punktów nieciągłości.*

Sformułowanie tezy dla funkcji nierosnącej pozostawiamy czytelnikowi.

Dowód. (i) Dla dowolnego $t \in J$ z Lematu 7.5.1 wynikają zależności

$$\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = \inf\{f(x); x \in J \text{ i } x > t\} \geq f(t),$$

jeśli t nie jest prawym końcem przedziału J , oraz

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \sup\{f(x); x \in J \text{ i } x < t\} \leq f(t),$$

jeśli t nie jest lewym końcem. Dla $t \in J^o$ otrzymujemy stąd (7.28).

(ii) Z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że – z dokładnością do końców przedziału – punkty nieciągłości tworzą zbiór N_f tych punktów wewnętrznych $t \in J$, w których granice jednostronne funkcji są różne. Wybierając dla każdego takiego wewnętrznego punktu nieciągłości t liczbę wymierną

$$q_t \in \left(\lim_{x \rightarrow t^-} f(x), \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \right)$$

z własności (7.28) wnioskujemy, że $q_t < q_\tau$ dla punktów nieciągłości $t < \tau$. Przyporządkowanie

$$N_f \ni t \mapsto q_t \in \mathbb{Q}$$

ustala równoliczność zbioru N_f z podzbiorem zbioru liczb wymiernych. \square

Przykład 7.5.1. Każdy przeliczalny zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem punktów nieciągłości pewnej funkcji niemalejącej. Aby skonstruować taką właśnie funkcję, ustalmy ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożony ze wszystkich elementów zbioru Z i rozważmy dowolny szereg zbieżny $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach dodatnich.

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ przyjmijmy oznaczenie $Z_x = \{n \in \mathbb{N}; z_n \leq x\}$. Pomiedzy wyróżnionymi zbiorami indeksów zachodzą łatwe do sprawdzenia zależności

$$Z_{t^-} := \bigcup_{x < t} Z_x = \{n \in \mathbb{N}; z_n < t\} \subset Z_t = \bigcap_{x > t} Z_x. \quad (7.29)$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sum_{n \in Z_x} a_n \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \quad (7.30)$$

jest niemalejąca i ma nieciągłości dokładnie w punktach zbioru Z . Istotnie, z (7.29) wynika równość

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \sum_{n \in Z_{t^-}} a_n \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

oraz prawostronna ciągłość funkcji, $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t)$, przy czym

$$Z_t \setminus Z_{t^-} = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } t \notin Z \\ \{n\}, & \text{gdy } t = z_n \in Z. \end{cases}$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = f(t) \iff t \notin Z$.

Proponujemy czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja f jest ściśle monotoniczna, a więc rosnąca, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Z jest *gęsty* w tym sensie, że każdy niepusty przedział otwarty zawiera punkty należące do Z .

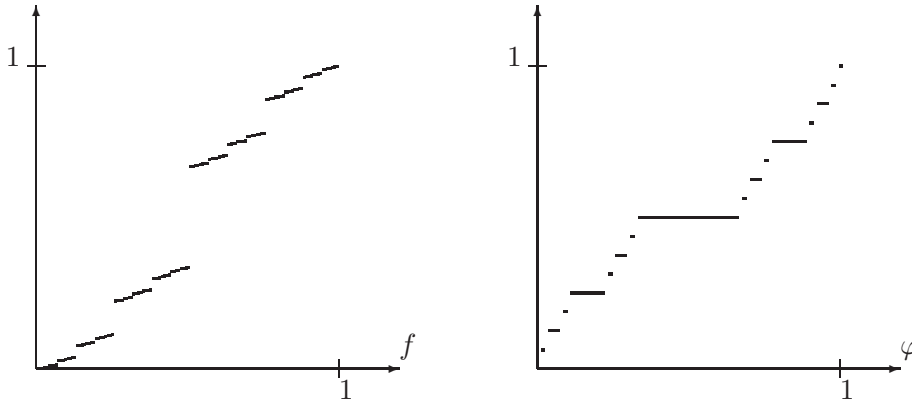
Przykład 7.5.2 (Funkcja Cantora–Lebesgue’a). Dla dowolnej liczby naturalnej $m \geq 2$, jedną z konsekwencji aksjomatu ciągłości jest możliwość rozwinięcia każdej liczby rzeczywistej x w szereg potęgowy

$$x = [x] + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{m^n}, \quad \text{gdzie } a_n \in \{0, 1, \dots, m-1\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \quad (7.31)$$

Przy oznaczeniu $\mathbb{Q}_m = \{q \in \mathbb{Q}; m^n q \in \mathbb{Z} \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}$, rozkład (7.31) jest jednoznaczny dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_m$. Można pokazać, że dla liczby $x \in \mathbb{Q}_m$ istnieje dokładnie jeden szereg opisanej wyżej postaci zawierający nieskończenie wiele składników różnych od 0. Korzystając ze wskazanej w ten sposób jednoznaczności rozwinięcia binarnego liczb, rozważmy funkcję $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ taką, że

$$f(0) = 0 \quad \text{i} \quad f\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^n}, \quad (7.32)$$

gdzie zakładamy, że zbiór $\{n; a_n = 1\}$ jest nieskończony.



Rysunek 7.2: Dwa spojrzenia na krzywą Cantora–Lebesgue’a

Funkcja f jest ściśle monotoniczna i ciągła w końcach przedziału oraz w punktach $x \notin \mathbb{Q}_2$, a każda liczba postaci $q = \sum_{n \leq k} \frac{a_n}{2^n} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}_2$ jest jej punktem nieciągłości. Dokładniej, jeśli $a_k = 1$, a więc

$$q = \sum_{n < k} \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^k} = \sum_{n < k} \frac{a_n}{2^n} + \sum_{n > k} \frac{1}{2^n},$$

to

$$\lim_{x \rightarrow q^+} f(x) = \sum_{n < k} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{2}{3^k} > \sum_{n < k} \frac{2a_n}{3^n} + \sum_{n > k} \frac{2}{3^n} = f(q) = \lim_{x \rightarrow q^-} f(x),$$

przy czym $\lim_{x \rightarrow q^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow q^-} f(x) = \frac{1}{3^k}$. Jak z tego wynika, zdefiniowana w (7.32) funkcja rosnąca jest na przedziale $[0, 1]$ – poza wspólnym, przeliczalnym zbiorem punktów nieciągłości – identyczna z funkcją skonstruowaną w poprzednim przykładzie, dla ciągu

$$z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots \right) \quad (7.33)$$

i szeregu o sumie równej 1 i wyrazach

$$a = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots \right) \quad (7.34)$$

czyli $z_n = \frac{2k+1}{2^m}$ i $a_n = \frac{1}{3^m}$, gdy $2^{m-1} \leq n < 2^m$ i $n = 2^{m-1} + k$ dla $k < 2^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$.

Zgodnie ze Stwierdzeniem 6.5.1 funkcja f posiada ciągłą funkcję odwrotną $\varphi = f^{-1}$ określoną na obrazie

$$f[0, 1] = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f(z_n), \lim_{x \rightarrow z_n^+} f(x)),$$

gdzie długości poszczególnych przedziałów tworzą ciąg (7.34).

Rysunek 7.2 zawiera szkic wykresu funkcji f oraz funkcji $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ rozszerzonej w ten sposób, by

$$\varphi(t) = z_n \quad \text{dla} \quad t \in [f(z_n), \lim_{x \rightarrow z_n^+} f(x)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definicja 7.5.1. Skonstruowana wyżej, monotoniczna i ciągła funkcja φ nosi nazwę funkcji Cantora–Lebesgue’a. Zbiór domknięty

$$\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f(z_n), \lim_{x \rightarrow z_n^+} f(x))$$

nazywamy zbiorem Cantora.

Rozdział 8

Jak podejść do pochodnej?

8.1 Pochodne

Pojęcie pochodnej, jak wiele fundamentalnych pojęć matematyki, ma swe źródło w fizyce, gdzie proces pomiaru prędkości (pojazdu, cząstki, planety) wymaga porównania drogi przebytej przez badany obiekt do czasu obserwacji. Jeśli drogę $s(t)$ przebytą przez obiekt traktujemy jako funkcję czasu t , to *średnia prędkość* obiektu w czasie $[t, t + \Delta]$ wynosi $\frac{s(t+\Delta)-s(t)}{\Delta}$, a skracanie czasu pomiaru $\Delta \rightarrow 0$ prowadzi do pojęcia *prędkości chwilowej*.

Definicja 8.1.1. Dla dowolnej funkcji rzeczywistej f określonej na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ i dowolnego punktu wewnętrznego $t \in J$ mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie t , jeśli istnieje granica

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}. \quad (8.1)$$

Liczbę $f'(t)$ nazywamy wówczas pochodną funkcji f w punkcie t . Ułamek $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ jest ilorazem różnicowym funkcji f względem $x, t \in J$.

Funkcję f uznajemy za różniczkowalną w punkcie $t \in J$ będącym dowolnym z końców przedziału, jeśli istnieje pochodna jednostronna

$$f'_-(t) = \lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \quad \text{lub} \quad f'_+(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad (8.2)$$

odpowiednio, lewostronna lub prawostronna

Dla uproszczenia, pochodne (jednostronne) w końcach przedziału, jeśli istnieją, oznaczamy także jako $f'(t)$.

Uwaga 8.1.1. Zarówno istnienie pochodnej jak i sama wartość $f'(t)$ są własnościami *lokalnymi* i o ile zależą od wartości funkcji f na dowolnym otoczeniu $J \cap (t - c, t + c)$ dla $c > 0$, to od samego otoczenia nie zależą.

Definicja 8.1.2. Funkcję $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy różniczkowalną, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie swej dziedziny. Pochodną funkcji różniczkowalnej f nazywamy funkcję $f'(x)$ dla $x \in J$, $f': J \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 8.1.1. Funkcja stała ma pochodną równą 0, natomiast $\text{id}' = 1$. Ogólniej, jeśli f jest dowolną funkcją liniową, $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$ i ustalonych $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\frac{(ax + b) - (at + b)}{x - t} = \frac{a(x - t)}{x - t} = a \quad \text{dla } x \neq t,$$

a więc pochodna $f'(t)$ istnieje w każdym punkcie $t \in \mathbb{R}$ i jest stałym współczynnikiem nachylenia prostej w \mathbb{R}^2 opisanej równaniem $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga 8.1.2. Jak się przekonamy w jednym z kolejnych podrozdziałów, funkcja stała jest jedyną, której pochodna jest tożsamościowo równa zeru (por. Twierdzenie 8.3.7(i)). Wynika stąd częściowa odwracalność operacji różniczkowania: funkcje różniczkowalne $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$, dla których $f' = g'$, są równe, jeśli są równe przynajmniej w jednym punkcie $t \in J$.

Ponieważ funkcja liniowa jest równaniem prostej w \mathbb{R}^2 , szukając prostej najbliższej wykresowi badanej funkcji f , w otoczeniu punktu $x = t$, otrzymujemy

Twierdzenie 8.1.1 (Geometryczna interpretacja pochodnej). Każda funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła w punkcie $t \in J$ jest różniczkowalna w t wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta o równaniu $y(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, dla której

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - (ax + b)}{x - t} = 0. \quad (8.3)$$

Jeśli wskazana wyżej granica istnieje, szukana prosta jest dokładnie jedna, a jej współczynnik kierunkowy $a = f'(t)$ jest pochodną funkcji f .

Dowód. Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą ciągłą w t . Skończona wartość granicy występującej w (8.3) wymaga, by granicą licznika w $x = t$ było 0, co daje równość $f(t) - (at + b) = 0$, a więc $b = f(t) - at$. Badany iloraz redukuje się zatem do

$$\frac{f(x) - (ax + b)}{x - t} = \frac{f(x) - f(t) - a(x - t)}{x - t} = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} - a$$

co sprowadza warunek (8.3) do definicji liczby a jako pochodnej $f'(t)$. \square

Uwaga 8.1.3. Interpretacja warunku (8.3) w terminach odległości oznacza, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|f(x) - (ax + b)| < \varepsilon|x - t| \quad \text{dla } x \in J \cap (t - \delta, t + \delta),$$

co oznacza, że przybliżenie funkcji f szukaną funkcją liniową w otoczeniu punktu różniczkowalności t jest relatywnie tym lepsze, im mniejsza jest odległość $|x - t|$.

Definicja 8.1.3. Dla dowolnej funkcji f różniczkowalnej w punkcie t , prostą o równaniu $y(x) = f'(t)(x - t) + f(t)$ nazywamy styczną do (wykresu) funkcji f .

Przykład 8.1.2. W przypadku funkcji potęgowej $f(x) = x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, przekształcenie ilorazu różnicowego

$$\frac{x^n - t^n}{x - t} = \frac{(x - t)(x^{n-1} + x^{t-2}t + \dots + xt^{n-2} + t^{n-1})}{x - t} \quad \text{dla } x \neq t,$$

pozwała wyznaczyć pochodną $f'(x) = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 8.1.3. Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$ ma pochodną w każdym punkcie $t > 0$. Istotnie, z tożsamości

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{t}}{x - t} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{t})(\sqrt{x} + \sqrt{t})}{(x - t)(\sqrt{x} + \sqrt{t})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} \quad \text{dla } x \geq 0,$$

wynika, że $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ dla $t > 0$. Pochodna funkcji *pierwiastek* w $t = 0$ nie istnieje.

Zgodnie z Wnioskiem 7.3.2, pochodna $f'(t)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(t)}{x - t}$ określony dla $x \neq t$ rozszerza się do funkcji ciągłej w $t \in J$. Wynika stąd

Stwierdzenie 8.1.2 (Lemat Carathéodory'ego). Funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $t \in J$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f_t: J \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła w t i taka, że

$$f(x) - f(t) = (x - t)f_t(x) \quad \text{dla } x \in J. \quad (8.4)$$

Jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas $f'(t) = f_t(t)$.

Dowód. Jeśli istnieje pochodna $f'(t)$, możemy zdefiniować funkcję f_t przyjmując

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} & \text{dla } x \in J \setminus \{t\}, \\ f'(t) & \text{dla } x = t. \end{cases}$$

Ciągłość funkcji f_t wynika z Wniosku 7.3.2. Z drugiej strony, jeśli istnieje funkcja f_t spełniająca (8.4) i ciągła w punkcie $t \in J$, to dla $x \neq t$ mamy

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f_t(x) \longrightarrow f_t(t) \quad \text{dla } x \longrightarrow t,$$

a zatem $f'(t) = f_t(t)$. □

Definicja 8.1.4. Dla każdego $t \in J$ funkcję $f_t: J \rightarrow \mathbb{R}$, ciągłą w t i spełniającą warunek (8.4) będziemy nazywać funkcją przyrostową dla f w punkcie t .

Funkcje przyrostowe wyróżniamy, ponieważ mają istotne znaczenie *techniczne*: pełnią ważną, pomocniczą rolę w dowodach własności pochodnych i operacji różniczkowania.

Pierwszą konsekwencją istnienia pochodnej w punkcie t jest ciągłość i wskazana niżej forma monotoniczności.

Wniosek 8.1.3. (i) Warunek konieczny różniczkowalności: *Funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w $t \in J$ jest w tym punkcie ciągła.*

(ii) *Jeśli $f'(t) > 0$, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $x \in J$ zachodzą implikacje*

$$t - \delta < x < t \implies f(x) < f(t), \quad t < x < t + \delta \implies f(t) < f(x).$$

(iii) *Jeśli $f'(t) < 0$, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $x \in J$ zachodzą implikacje*

$$t - \delta < x < t \implies f(x) > f(t), \quad t < x < t + \delta \implies f(t) > f(x).$$

Własności (i)–(iii) obejmują także przypadek, gdy $t \in J$ jest jednym z końców przedziału.

Dowód. Z równości (8.4) i ciągłości funkcji f_t wynika ciągłość w punkcie t funkcji $f(x) = f(t) + (x-t)f_t(x)$ dla $x \in J$. Jeśli $f'(t) = f_t(t) > 0$, to istnieje $\delta > 0$ takie, że $f_t(x) > 0$ dla $x \in J \cap (t-\delta, t+\delta)$. Liczby $f(x) - f(t)$ i $x - t$ mają wówczas ten sam znak, a to potwierdza prawdziwość dowodzonych implikacji. W przypadku $f'(t) = f_t(t) < 0$, w otoczeniu punktu t liczby $f(x) - f(t)$ i $x - t$ mają przeciwny znak. □

Uwaga 8.1.4. Jak zwykle w sytuacji, gdy znamy wzór opisujący badaną funkcję, a nie uznaliśmy za stosowne, by funkcję obdarzyć nazwą, możemy korzystać z alternatywnego oznaczenia pochodnej, np.

$$f'(t) = \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=t} f(x) \quad \text{dla } t \in J. \quad (8.5)$$

Mniej precyzyjna notacja $\frac{d}{dx}f(x)$ używana jest głównie do oznaczenia pochodnej jako funkcji f' i powinna być uzupełniana o wiążące zmienną x wskazanie jej dziedziny, czy też zakresu zmienności.

Przykład 8.1.4. Dla funkcji *sinus* pochodną

$$\frac{d}{dx}\Big|_{x=t} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\sin(x) - \sin(t)}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\sin((x-t)/2)}{(x-t)/2} \cos \frac{x+t}{2} = \cos(t),$$

wyznaczamy, korzystając z istnienia granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. W analogiczny sposób wyznaczamy pochodną $\frac{d}{dx}\Big|_{x=t} \cos(x) = -\sin(t)$.

Przykład 8.1.5. Wykażemy, że $\frac{d}{dx}\Big|_{x=t} e^x = e^t$ dla $t \in \mathbb{R}$. Przekształcamy iloraz różnicowy w dowolnym punkcie $t \in \mathbb{R}$ do postaci

$$\frac{e^x - e^t}{x - t} = e^t \frac{e^{x-t} - 1}{x - t} = e^t g(x - t) \quad \text{dla } x \neq t,$$

gdzie funkcja $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ dla $x \neq 0$ posiada ciągłe rozszerzenie wynikające z rozwinięcia e^x w szereg, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym $g(0) = 1$.

Przykład 8.1.6. Zachodzi równość $\frac{d}{dx}\Big|_{x=t} \ln(x) = \frac{1}{t}$ dla $t > 0$. Istotnie, iloraz różnicowy dla funkcji \ln w punkcie $t > 0$ wyraża się wzorem

$$\frac{\ln(x) - \ln(t)}{x - t} = \ln\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{x-t}} = \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{x-t}{t}\right)^{\frac{t}{x-t}} \quad \text{dla } x \in (0, \infty) \setminus \{t\}.$$

Z Twierdzenia 7.3.7 wynika zatem, iż *logarytm naturalny* ma ciągłą funkcję przyrostową postaci $\frac{1}{t} \ln\left(\varphi\left(\frac{x-t}{t}\right)\right)$ dla $x > 0$, gdzie

$$\varphi(x) = \begin{cases} e & \text{dla } x = 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \end{cases}$$

jest funkcję ciągłą.

Wiemy już (Twierdzenie 6.7.3), że każda funkcja będąca sumą szeregu potęgowego jest ciągła w całym przedziale zbieżności. Korzystając bezpośrednio z definicji wykażemy, że jest także różniczkowalna wewnątrz.

Twierdzenie 8.1.4 (Pochodna szeregu potęgowego). *Dla dowolnego szeregu potęgowego $(\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$ o promieniu zbieżności $\rho > 0$ suma szeregu*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dla } x \in (-\rho, \rho)$$

jest funkcją różniczkowalną i zachodzi równość

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{dla } x \in (-\rho, \rho),$$

przy czym ρ jest także promieniem zbieżności szeregu $(\sum (n+1) a_{n+1} x^n)_{n \geq 0}$.

Dowód. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym spełniającym warunek $r := \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Wówczas

$$\limsup_n \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = r,$$

co potwierdza, że oba szeregi mają ten sam promień zbieżności $\rho = \frac{1}{r}$ dla $r > 0$, albo $\rho = \infty$, gdy $r = 0$. Korzystając ze znanych własności szeregów zbieżnych, dla dowolnych $x, t \in (-\rho, \rho)$ ($x \neq t$) otrzymujemy

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (x^n + x^{n-1}t + \dots + xt^{n-1} + t^n).$$

Różnica $g_t(x) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$ jest zatem sumą szeregu

$$g_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} ((x^n - t^n) + (x^{n-1} - t^{n-1})t + \dots + (x - t)t^{n-1}) \quad \text{dla } x \in (-\rho, \rho),$$

a do udowodnienia pozostaje ciągłość $\lim_{x \rightarrow t} g_t(x) = 0 = g_t(x)$. Jeśli oznaczyć $\xi = \max\{|x|, |t|\} < \rho$ i skorzystać z (2.9), to dla poszczególnych składników tworzących funkcję g_t mamy oszacowanie

$$|(x^n - t^n) + (x^{n-1} - t^{n-1})t + \dots + (x - t)t^{n-1}| \leq |x - t|(n + (n-1) + \dots + 1)\xi^{n-1},$$

a więc $|g_t(x)| \leq |x - t| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} |a_{n+1}| \xi^{n-1} \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow t$. Zbieżność szeregu stanowiącego ograniczenie dla $|g_t(x)|$ wynika – jak wyżej – z kryterium Cauchy’ego. \square

Wniosek 8.1.5 (Rozwinięciem funkcji \ln w szereg potęgowy). *Zachodzi równość*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{dla } x \in (-1, 1], \quad (8.6)$$

przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{jeśli } x \in [0, 1], \\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} & \text{jeśli } x \in (-1, 0). \end{cases} \quad (8.7)$$

W szczególności, suma szeregu anharmonicznego wynosi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Dowód. Pochodne obu funkcji są równe $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ dla $x \in (-1, 1)$ i mają tę samą wartość w $x = 0$. Równość w przedziale otwartym wynika z Wniosku 8.3.8. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ jest zbieżny, możemy skorzystać z Twierdzenia Abela (Tw. 6.7.3(ii)). Równość (8.6) dla $x = 1$ wynika z ciągłości obu porównywanych funkcji.

Oszacowanie (8.7) dla $x \in [0, 1]$ wynika z kryterium Leibniza i nierówności (5.3). W przypadku $x \in (-1, 0)$ bezpośrednie porównanie z szeregiem geometrycznym daje

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1-|x|}. \quad \square$$

Ćwiczenie 8.1.1. Wzór (8.6) prowadzi także do szeregu zbieżnego, w którym $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Wykazać oszacowanie

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} < \ln(2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \cdot 2^k} < \frac{2}{n \cdot 2^n} \quad (8.8)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, co daje błąd przybliżenia $\ln(2) \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \cdot 2^k} + \frac{1.5}{n \cdot 2^n}$, mniejszy niż 10^{-9} dla $n \geq 25$ składników (por. Przykład 5.1.4).

8.2 Własności pochodnej

Podane w tytule podrozdziału własności dotyczą pochodnej jako operacji różniczkowania $f \rightsquigarrow f'$, a nie – pochodnej f' konkretnej funkcji. Mamy zatem

Twierdzenie 8.2.1 (Własności pochodnej). *Niech f, g będą dowolnymi funkcjami określonymi na przedziale $J \subset \mathbb{R}$, różniczkowalnymi w punkcie $t \in J$. Wówczas*

(i) *dla dowolnych liczb a, b funkcja $af + bg$ jest różniczkowalna w t i*

$$(af + bg)'(t) = af'(t) + bg'(t);$$

(ii) *iloczyn fg jest funkcją różniczkowalną w t , przy czym*

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t);$$

(iii) *jeśli $f(x) \neq 0$ w przedziale $J_c = J \cap (t-c, t+c)$, dla pewnego $c > 0$, to funkcja $1/f: J_c \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w t i zachodzi równość*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2}.$$

Dowód. Niech f_t i g_t oznaczają funkcje przyrostowe, odpowiednio dla f i g w punkcie t . Przy dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ kombinacja liniowa $af_t + bg_t$ jest funkcją przyrostową dla $af + bg$, a jej ciągłość w t dowodzi (i). Dla iloczynu fg sprawdzamy równość

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(t)g(t) &= (f(x) - f(t))g(x) + f(t)(g(x) - g(t)) \\ &= (x - t)(f_t(x)g(x) + f(t)g_t(x)) \end{aligned}$$

dla $x \in J$. Suma $f_t(x)g(x) + f(t)g_t(x)$, $x \in J$, jest zatem funkcją przyrostową dla fg , a jej ciągłość w t wynika z ciągłości funkcji g .

Przy założeniach podanych w (iii), z tożsamości

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(t)} = -\frac{f(x) - f(t)}{f(x)f(t)} = (x - t) \frac{-f_t(x)}{f(x)f(t)} \quad \text{dla } x \in J_c$$

oraz ciągłości w t funkcji występujących po prawej stronie wnioskujemy o różniczkowalności funkcji $1/f$ i wyznaczamy wzór na pochodną. \square

Wniosek 8.2.2. *Iloraz funkcji $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnych w $t \in J$ i takich, że $g(t) \neq 0$, ma pochodną w punkcie t równą*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}.$$

Dowód. Ćwiczenie. \square

Przykład 8.2.1. Dla funkcji *tangens* sprawdzamy

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=t} \operatorname{tg}(x) = \frac{\cos(t) \cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \operatorname{tg}^2(t).$$

Listę podstawowych twierdzeń dotyczących różniczkowalności i ułatwiających wyznaczanie pochodnych zamyka

Twierdzenie 8.2.3 (Pochodna złożenia i funkcji odwrotnej). (i) *Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi na przedziałach J, K , takimi że $f[J] \subset K$, przy czym funkcja f jest różniczkowalna w $t \in J$, a funkcja g – w punkcie $f(t) \in K$. Wówczas złożenie $g \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w t i*

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t). \quad (8.9)$$

(ii) *Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją odwracalną, różniczkowalną w punkcie $t \in J$. Jeśli $f'(t) \neq 0$, to funkcja odwrotna $f^{-1}: f[J] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $f(t)$ i zachodzi równość*

$$(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}. \quad (8.10)$$

Pozorne wzmocnienie założeń dotyczących ciągłości funkcji odwracalnej f jest konsekwencją Twierdzeń 6.5.1 – 6.5.2.

Dowód. (i) Niech f_t i $g_{f(t)}$ oznaczają funkcje przyrostowe, odpowiednio dla f i g w punktach t i $f(t)$, a więc takie, że

$$f(x) - f(t) = (x - t)f_t(x) \quad \text{i} \quad g(y) - g(f(t)) = (y - f(t))g_{f(t)}(y)$$

dla $x \in J$, $y \in K$. Prowadzi to do tożsamości

$$g(f(x)) - g(f(t)) = (f(x) - f(t))g_{f(t)}(f(x)) = (x - t)g_{f(t)}(f(x))f_t(x)$$

dla $x \in J$. Z Lematu Carathéodory'ego wnioskujemy zatem równość (8.9).

(ii) Niech $K = f[J]$. Z założenia $f'(t) \neq 0$ i z różnowartościowości f wynika, że funkcja przyrostowa f_t taka, że $f(x) - f(t) = (x - t)f_t(x)$ dla $x \in J$, jest w każdym punkcie różna od 0. Równość $x - t = (f(x) - f(t))/f_t(x)$ dla $x = f^{-1}(y) \in J$ implikuje tożsamość

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(f(t)) = (y - f(t)) \frac{1}{f_t(f^{-1}(y))}$$

dla $y \in K$, a zatem funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(t)$ i jej pochodna wynosi

$$\frac{1}{f_t(f^{-1}(f(t)))} = \frac{1}{f'(t)}. \quad \square$$

Przykład 8.2.2. $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$ dla $x > 0$ i dowolnego wykładnika $a \in \mathbb{R}$. Istotnie, różniczkując funkcję złożoną $x^a = e^{a \ln(x)}$ w punkcie $x = t > 0$, otrzymujemy

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=t} e^{a \ln(x)} = e^{a \ln(t)} \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=t} (a \ln(x)) = t^a \frac{a}{t} = at^{a-1}.$$

Dla $a > 0$ i $t = 0$ sprawdzamy bezpośrednio z definicji

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0^+} x^a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a > 1, \\ \infty, & \text{gdy } a \in (0, 1). \end{cases}$$

Przykład 8.2.3. Funkcje ciągłe

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

mają w punktach $x \neq 0$ pochodne równe

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{oraz} \quad g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

W punkcie $x = 0$ funkcja f nie jest różniczkowalna, natomiast

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Funkcja g jest różniczkowalna, ale jej pochodna g' nie jest ciągła. Zachęcamy czytelników do sporządzenia wykresów obu funkcji i ich pochodnych.

Ze wzoru na pochodną funkcji \ln (Przykład 8.1.6) wynika także

Wniosek 8.2.4. Dla dowolnej różniczkowalnej funkcji dodatniej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=t} \ln(f(x)) = \frac{f'(t)}{f(t)} \quad \text{dla } t \in J. \quad \square$$

Iloraz $\frac{f'}{f}$ nazywany jest często *pochodną logarytmiczną* funkcji f .

Przykład 8.2.4. (i) Funkcja $\arcsin(x)$ dla $x \in [-1, 1]$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = \sin(x)$ dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na mocy Twierdzenia 8.2.3(ii) dostajemy

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=t} \arcsin(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(t))} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{dla } t \in (-1, 1),$$

gdzie $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} > 0$, dla $y = \arcsin(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(ii) Funkcja $\arctg(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest odwrotną do funkcji *tangens* równej $\tg(x)$ dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zatem

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=t} \arctg(x) = \frac{1}{1/\cos^2(\arctg(t))} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

Wniosek 8.2.5. Zachodzi równość

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{dla } x \in [-1, 1], \quad (8.11)$$

przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \arctg(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (8.12)$$

W szczególności prawdziwy jest wzór *Leibniza* (3.4)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Szereg naprzemienny $(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ nazywany jest *szeregiem Leibniza*.

Dowód. Obie funkcje mają tę samą wartość w $x = 0$ i tę samą pochodną $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, a zatem ich równość zapewnia Wniosek 8.3.8. Ponieważ szereg potęgowy ma promień zbieżności równy 1, prawa strona rozwinięcia (8.11) nie jest określona dla $|x| > 1$, a równość zachodzi w przedziale otwartym $(-1, 1)$. W punktach $x = \pm 1$ badany szereg jest zbieżny do $\pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Możemy zatem powołać się na Twierdzenie Abela (tw. 6.7.3(ii)) i – korzystając z ciągłości obu porównywanych funkcji – rozszerzyć równość (8.11) na przedział domknięty.

Oszacowanie błędu (8.12) wynika bezpośrednio z kryterium Leibniza. \square

Ćwiczenie 8.2.1. Stosując do wzoru Leibniza metodę przedstawioną w Przykładzie 5.1.4, wykazać równości

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 1 + 8 \left(\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n-3)(4n-1)(4n+1)} \\ &= \frac{5}{3} - 8 \left(\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots \right) = \frac{5}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)}. \end{aligned}$$

Sprawdzić oszacowania $C_n \leq \frac{\pi}{2} \leq B_n$, gdzie $B_n - C_n = \frac{4}{(4n+1)^2(4n+3)^2} < \frac{1}{64n^4}$ i

$$B_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{8}{(4k-3)(4k-1)(4k+1)} + \frac{1}{(4n+1)^2}, \quad C_n = \frac{5}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{8}{(4k-1)(4k+1)(4k+3)} - \frac{1}{(4n+3)^2}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć liczbę składników potrzebnych dla obliczenia $\frac{\pi}{2}$ z dokładnością do 10^{-9} .

8.3 Konsekwencje różniczkowalności

Rozważane do tej pory przykłady pokazują, że przynajmniej w odniesieniu do funkcji elementarnych różniczkowalność jest dość naturalną własnością. Pozostając przy funkcjach ciągłych, określonych na dowolnym (niezdegenerowanym do punktu) przedziale J , w bieżącym podrozdziale będziemy z reguły zakładać różniczkowalność funkcji *wewnątrz* dziedziny, czyli w każdym punkcie przedziału otwartego $J^\circ \subset J$ o tych samych końcach co J .

Przypominając Definicję 6.3.1, każdy punkt, w którym dana funkcja ma lokalne minimum lub lokalne maksimum, będziemy nazywać punktem *lokalnego ekstremum*. Podstawą do wyprowadzenia wielu zaawansowanych twierdzeń jest

Twierdzenie 8.3.1 (Lemat Fermata). *Jeśli funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie wewnętrznym $t \in J$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(t) = 0$.*

Dowód. Dla funkcji f różniczkowalnej w punkcie $t \in J$, zgodnie z Lematem Carathéodory'ego istnieje funkcja przyrostowa f_t taka, że

$$f(x) - f(t) = (x - t)f_t(x) \quad \text{dla } x \in J.$$

Jeśli funkcja f ma w t lokalne minimum, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $(t - \delta, t + \delta) \subset J$ i $f(x) - f(t) \geq 0$ dla wszystkich $x \in (t - \delta, t + \delta)$. Implikuje to nierówności

$$f_t(x) \geq 0 \quad \text{dla } x \in (t - \delta, t) \quad \text{i} \quad f_t(x) \leq 0 \quad \text{dla } x \in (t, t + \delta)$$

i z ciągłości f_t w t wynika równość $f'(t) = f_t(t) = 0$. Przypadek lokalnego minimum sprowadzamy do lokalnego maksimum funkcji $-f$. \square

Definicja 8.3.1. *Liczba $t \in J$ jest punktem krytycznym funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli pochodna $f'(t)$ istnieje i jest równa 0, albo funkcja f nie jest różniczkowalna w t .*

Lemat Fermata podaje klasyczny *warunek konieczny*, ograniczający zbiór potencjalnych, nieznanych punktów ekstremalnych funkcji f do zbioru punktów krytycznych.

Wniosek 8.3.2. *Jeżeli funkcja ciągła $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określona na skończonym przedziale domkniętym $J \subset \mathbb{R}$ osiąga wartość maksymalną (lub minimalną) w punkcie $t \in J$, to t jest punktem krytycznym lub jednym z końców przedziału J .* \square

Przed nami bardziej szczegółowa analiza rozstrzygająca, które z punktów krytycznych są punktami ekstremalnymi. Kolejne kroki w tym kierunku wynikają z Lematu Fermata.

Twierdzenie 8.3.3 (Rolle'a – rozszerzone). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą, różniczkowalną wewnątrz przedziału. W przedziale (a, b) istnieje punkt krytyczny, czyli $f'(t) = 0$ dla pewnego $t \in (a, b)$, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

- (i) $f(a) = f(b)$, lub
- (ii) pochodne jednostronne $f'(a), f'(b)$ istnieją i $f'(a)f'(b) < 0$.

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem Weierstrassa 6.3.4 w przedziale $[a, b]$ istnieją liczby t_{\min}, t_{\max} , w których funkcja f przyjmuje odpowiednio wartość minimalną $f(t_{\min})$ i maksymalną $f(t_{\max})$. Jeśli choć jedna z liczb t_{\min}, t_{\max} jest punktem wewnętrznym, z Lematu Fermata wynika, iż jest to punkt krytyczny funkcji f . Jeśli natomiast $t_{\min}, t_{\max} \in \{a, b\}$ są końcami przedziału, to w przypadku (i) równość $f(t_{\min}) = f(t_{\max})$ oznacza, że f jest funkcją stałą, a jej pochodną jest 0.

W przypadku (ii), zamieniając ewentualnie f na $-f$ możemy założyć, że $f'(a) < 0 < f'(b)$. Z Wniosku 8.1.3(ii)–(iii) wynika istnienie liczb $\alpha > a$ i $\beta < b$ takich, że $f(\alpha) < f(a)$ i $f(\beta) < f(b)$. Tym samym wartość minimalna funkcji f jest mniejsza niż jej wartości na końcach przedziału, a $t_{\min} \in (a, b)$ jest szukany punktem krytycznym. \square

Twierdzenie 8.3.3(ii) byłoby oczywiste, gdyby f' była funkcją ciągłą – co nie zawsze jest prawdą. Zachodzi przy tym ogólniejszy

Wniosek 8.3.4 (Własność Darboux pochodnej). *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f'(a) \neq f'(b)$, to dla każdej wartości pośredniej λ istnieje punkt $c \in (a, b)$, taki że $f'(c) = \lambda$.*

Dowód. Ćwiczenie. Zbadać funkcję $g(x) = f(x) - \lambda x$, dla $x \in [a, b]$. \square

Jeśli w Twierdzeniu Rolle’a odrzucić dodatkowe warunki, otrzymujemy

Twierdzenie 8.3.5 (Lagrange’a). *Dla każdej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnej wewnątrz przedziału istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (8.13)$$

Dowód. Funkcja $g(x) = f(x) - s(x - a)$ dla $x \in [a, b]$ spełnia wszystkie założenia Twierdzenia Rolle’a, jeśli przyjąć $s = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. W punkcie krytycznym $c \in (a, b)$, $0 = g'(c) = f'(c) - s$. \square

Wniosek 8.3.6. *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b) . Jeśli istnieje prawostronna granica pochodnej f' w punkcie a , to funkcja f jest różniczkowalna (jednostronnie) w a i zachodzi równość*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x). \quad (8.14)$$

Jeśli istnieje granica pochodnej w prawym końcu przedziału, to granica ta jest lewostronną pochodną funkcji f , tzn.

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x). \quad (8.15)$$

Dowód. Załóżmy, że istnieje granica $g = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem w przedziale (a, b) zbieżnym do a , to dla każdego n istnieje liczba $c_n \in (a, x_n)$ taka, że

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(c_n).$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że ciąg $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do a , co pociąga za sobą zbieżność ciągu ilorazów różniczkowych do liczby g – i kończy dowód równości (8.14). Analogiczne rozumowanie dotyczące zbieżności w prawym końcu przedziału pozostawiamy czytelnikowi. \square

Twierdzenie Lagrange’a nazywane jest też często *twierdzeniem o wartości średniej* dla przyrostów funkcji różniczkowalnej. Wzór (8.13) wiąże znak pochodnej z monotonicznością funkcji, co precyzuje

Twierdzenie 8.3.7 (O monotoniczności). *Niech f będzie dowolną ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na przedziale J i różniczkowalną w jego wnętrzu J° .*

- (i) *Funkcja f jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla $x \in J^\circ$.*
- (ii) *Funkcja f jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in J^\circ$. Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego x , to f jest funkcją rosnącą.*
- (iii) *Funkcja f jest nierosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leq 0$ dla wszystkich $x \in J^\circ$. Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego x , to f jest funkcją malejącą.*

Stosując własność (i) do różnicy dwu funkcji otrzymujemy wykorzystywany już wcześniej

Wniosek 8.3.8. *Funkcje różniczkowalne $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f' = g'$, są równe na przedziale J wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą wartość $f(x_0) = g(x_0)$ przynajmniej w jednym punkcie $x_0 \in J$.* \square

Dowód Twierdzenia 8.3.7. Dla dowolnych dwu punktów $x_1, x_2 \in J$ takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi równość

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \quad \text{dla pewnego } c \in J^\circ.$$

W zależności od znaku pochodnej wynikają stąd nierówności

$$f(x_1) - f(x_2) \begin{cases} > 0, & \text{jeśli } f' > 0, \\ \geq 0, & \text{jeśli } f' \geq 0, \\ \leq 0, & \text{jeśli } f' \leq 0, \\ < 0, & \text{jeśli } f' < 0. \end{cases}$$

Dla dowodu przeciwnej implikacji wystarczy ograniczyć się do przypadku (ii), gdy f jest funkcją niemalejącą, różniczkowalną w $t \in J^\circ$. Wówczas

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0,$$

gdyż w każdym z przypadków ($x < t$ lub $x > t$) znak licznika i mianownika w ilorazie różnicowym jest ten sam. W przypadku funkcji nierosnącej skorzystamy z równości $(-f)'(t) = -f'(t)$. \square

Wynika stąd *warunek konieczny i dostateczny odwracalności funkcji*:

Wniosek 8.3.9 (Twierdzenie o odwracalności). *Funkcja ciągła $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określona na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ i różniczkowalna poza skończonym zbiorem punktów $Z \subset J$, jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *pochodna $f': J \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}$ ma stały znak, tzn. albo $f' \geq 0$, albo $f' \leq 0$, oraz*

(ii) *zbiór $\{x \in J \setminus Z; f'(x) = 0\}$ nie ma punktów wewnętrznych, tzn. nie istnieje niepusty przedział otwarty $U \subset J \setminus Z$ taki, że $f'|_U = 0$.*

Przypominamy, że zgodnie z Twierdzeniem 8.2.3(ii) funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna wszędzie tam, gdzie pochodna f' istnieje i jest niezerowa.

Dowód. Odwracalność funkcji f oznacza jej różnowartościowość, a ta jest równoważna – na mocy Twierdzenia 6.5.2 – silnej monotoniczności. Jeśli zbiór Z nie zawiera punktów wewnętrznych przedziału J , teza wynika z Twierdzenia 8.3.7, co pokażemy w pełnej ogólności zakładając, że zbiór $J^\circ \cap Z$ składa się z punktów $z_1 < \dots < z_k$, $k \geq 0$, dzielących przedział J na $k + 1$ przedziałów J_i , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Dla $k = 0$ niech $J_0 = J$, natomiast dla $k \geq 1$ przyjmujemy

$$J_0 = J \cap (-\infty, z_1], \quad J_i = [z_i, z_{i+1}], \quad \text{jeśli } 1 \leq i < k, \quad J_k = J \cap [z_k, \infty).$$

Zachodzi równość $J = \bigcup_{i=0}^k J_i$, przy czym wewnątrz każdego z przedziałów funkcja f jest różniczkowalna, a więc spełnia założenia Twierdzenia o monotoniczności. Każdy przedział $K \subset J$ jest podzbiorem jednego z przedziałów J_i , o ile tylko nie zawiera w swym wnętrzu punktów zbioru $J^\circ \cap Z$.

Jeśli f jest funkcją rosnącą, to dla każdego i zachodzi nierówność $f'|_{J_i} \geq 0$, a więc $f' \geq 0$ oraz, z tego samego powodu, $f' \leq 0$, jeśli f jest funkcją malejącą. Gdyby istniał przedział otwarty U taki, że $f'|_U = 0$, wówczas któryś z przedziałów J_i zawierałby U , a zgodnie z Twierdzeniem 8.3.7(i) funkcja

f , stała na przedziale U , nie byłaby różnowartościowa. Wykazaliśmy tym samym konieczność warunków (i)–(ii).

Udowodnimy teraz, że z założenia, iż pochodna f' spełnia warunki (i)–(ii), wynika różnowartościowość i odwracalność funkcji f . Istotnie, jeśli $f' \geq 0$, z Twierdzenia 8.3.7(ii)–(iii) wynika, że każde z obcięć $f|_{J_i}$, $i \leq k$, jest funkcją niemalejącą. Wynikające stąd nierówności

$$f(z_1) \leq f(z_2) \leq \dots \leq f(z_k)$$

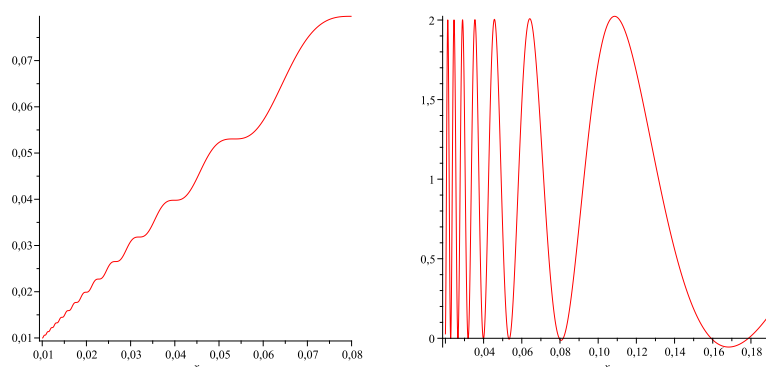
implikują monotoniczność funkcji f na całym przedziale J . Przypuśćmy, że dla pewnych liczb $x, y \in J$ zachodzi równość $f(x) = f(y)$, przy czym $x < y$. Z monotoniczności wynika, że $f|_{[x,y]}$ jest funkcją stałą, a pochodna f' jest równa 0 na niepustym przedziale (x, y) . Jest to sprzeczne z założoną własnością (ii), a zatem funkcja f jest różnowartościowa i odwracalna.

Przypadek $f' \leq 0$ jest w pełni analogiczny. \square

Przykład 8.3.1. Niewielka modyfikacja Przykładu 8.2.3 prowadzi do funkcji

$$g(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykresy funkcji i jej pochodnej (Rys. 8.1) sugerują silną monotoniczność



Rysunek 8.1: Wykres funkcji g i jej pochodnej

funkcji g – no, może za wyjątkiem otoczenia punktu $x = 0,17\dots$ Zachęcamy czytelników do sprawdzenia tej hipotezy – przy pomocy Maximy lub Maple – na odpowiednio powiększonym rysunku.

Korzystając z możliwości precyzyjnego określenia zachowania funkcji różniczkowalnej w otoczeniu lokalnego minimum lub maksimum, uzupełniamy Definicję 6.3.1.

Definicja 8.3.2. *Maksimum (lub minimum) lokalne uważamy za ścisłe, jeśli w pewnym otoczeniu punktu ekstremalnego wartość maksymalna (minimalna) jest przyjmowana dokładnie w jednym punkcie.*

Wniosek 8.3.10 (Warunki dostateczne lokalnego ekstremum). *Założmy, że $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą, różniczkowalną poza skończonym zbiorem punktów $Z \subset J$.*

(i) *f ma w punkcie krytycznym t minimum lokalne, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że*

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 & \text{dla } x \in (t-\delta, t) \subset J \setminus Z & \quad i \\ f'(x) &\geq 0 & \text{dla } x \in (t, t+\delta) \subset J \setminus Z. \end{aligned}$$

(ii) *f ma w punkcie krytycznym t maksimum lokalne, jeśli dla pewnego $\delta > 0$*

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 & \text{dla } x \in (t-\delta, t) \subset J \setminus Z & \quad i \\ f'(x) &\leq 0 & \text{dla } x \in (t, t+\delta) \subset J \setminus Z. \end{aligned}$$

(iii) *Lokalne ekstremum w punkcie t jest ścisłe, jeśli ponadto nie istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f'|_{(t-\delta, t)} = 0$ lub $f'|_{(t, t+\delta)} = 0$.*

Dowód. Z podanych warunków wynika, że w przypadku (i) funkcja f jest nierosnąca w przedziale $(t-\delta, t]$ i niemalejąca w przedziale $[t, t+\delta)$, natomiast w przypadku (ii) – odwrotnie. Zgodnie z Wnioskiem 8.3.9 warunek (iii) zapewnia różnowartościowość funkcji f w każdym z przedziałów $(t-\delta, t)$, $(t, t+\delta) \subset J$. \square

Ścisły związek sformułowanych wyżej warunków dostatecznych – zmiany znaku f' w t – oraz konsekwencji istnienia dodatniej lub ujemnej pochodnej funkcji f' uzasadnia celowość iteracji pojęcia pochodnej.

Definicja 8.3.3. *Funkcja ciągła $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określona na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ ma w punkcie $t \in J$ drugą pochodną lub pochodną rzędu drugiego*

$$f''(t) = (f')'(t),$$

jeśli pochodna f' istnieje i w otoczeniu $(t-c, t+c) \cap J$ punktu t i jest w tym punkcie funkcją różniczkowalną, dla pewnego $c > 0$.

Dla zachowania jednolitej terminologii pochodną f' nazywa się także *pierwszą pochodną* lub *pochodną rzędu pierwszego*, a samą funkcję f – *pochodną rzędu 0*.

Wniosek 8.3.11 (Warunek dostateczny silnego ekstremum II). *Jeśli $t \in J^\circ$ jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji f i istnieje pochodna $f''(t)$, to*

$$f'(t) = 0 \text{ i } f''(t) > 0 \implies f \text{ ma lokalne ścisłe minimum, oraz}$$

$$f'(t) = 0 \text{ i } f''(t) < 0 \implies f \text{ ma lokalne ścisłe maksimum}$$

w punkcie t .

Dowód. Istnienie drugiej pochodnej $f''(t)$ oznacza w szczególności różniczkowalność funkcji f w pewnym przedziale $(t-c, t+c)$. Jeśli $f'(t) = 0$, to zgodnie z Wnioskiem 8.1.3(ii) z własności $f''(t) > 0$ wynikają nierówności

$$f'(x) < 0 < f'(y) \quad \text{jeśli} \quad t-\delta < x < t < y < t+\delta$$

dla pewnego $\delta \in (0, c)$. Funkcja f i punkt krytyczny t spełniają zatem warunki dostateczne (i) oraz (iii) wskazane we Wniosku 8.3.10. Analogiczny układ warunków dostatecznych (i)–(ii) wynika z założenia $f''(t) < 0$. \square

Przykład 8.3.2 (W stronę wzoru Stirlinga, wg [5]). Z Twierdzenia 8.3.7 wyprowadziliśmy wcześniej wzór (8.6) na rozkład funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy. Wynika stąd równość

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad \text{dla } x \in (-1, 1),$$

przy czym porównanie z szeregiem geometrycznym prowadzi do oszacowania

$$1 < \frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) < 1 + \frac{x^2}{3(1-x^2)} \quad \text{dla } x \in (0, 1). \quad (8.16)$$

Ćwiczenie 8.3.1. Wyznaczyć pochodne funkcji $\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x$ oraz $\psi(x) = x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ dla $x \in [0, 1]$ i sprawdzić, że są to funkcje rosnące. Wyprowadzić stąd nierówności (8.16), nie odwołując się do rozwinięcia w szereg.

Wracając do przykładu zauważamy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $x = \frac{1}{2n+1}$ zachodzi równość $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{n}$, a nierówności (8.16) przyjmują postać

$$1 < \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \quad (8.17)$$

W uzupełnieniu do Twierdzenia 3.3.2 otrzymaliśmy przy okazji

Wniosek 8.3.12. *Zachodzi nierówność $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. \square*

Znaczenie nierówności (8.17) jest dużo większe, ale wymaga pomysłu, a właściwie POMYSŁU! Jeśli zapiszemy pierwszą z nierówności w postaci

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^n}{e^{n+1}} \quad (8.18)$$

i zauważymy, że $\frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!}$, to okazuje się, że prawa strona nierówności (8.18) jest ilorazem postaci a_{n+1}/a_n , gdzie

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a sama nierówność oznacza, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący. Druga część nierówności (8.17) prowadzi do oszacowania

$$1 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}}{e} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12n}}},$$

a to oznacza, że ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $b_n = a_n \cdot e^{\frac{1}{12n}} > a_n$ jest malejący. Ponieważ iloraz $\frac{b_n}{a_n}$ dąży do 1, wzajemnie ograniczające się ciągi

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1$$

są zbieżne, a wspólna granica $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$ spełnia nierówności

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} < c < \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \cdot e^{\frac{1}{12n}} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \quad (8.19)$$

Wynika stąd ważny wzór opisujący tzw. *asymptotyczne zachowanie funkcji $n!$* określonej w tej chwili tylko dla $n \in \mathbb{N}$.

Wniosek 8.3.13 (Wzór Stirlinga). *Istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$n! = c^{-1} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (8.20)$$

dla pewnego zależnego od n wykładnika $\theta = \theta_n \in (0, 1)$.

Dowód. Z (8.19) wynika, że iloraz $\frac{c}{a_n}$ mieści się w przedziale $(1, e^{\frac{1}{12n}})$. Stąd $\theta_n = 12n \ln\left(\frac{c}{a_n}\right) \in (0, 1)$. \square

Ćwiczenie 8.3.2. Korzystając z oszacowania (8.19) – dla różnych wartości n – wyznaczyć stałą c z dokładnością do 5 cyfr po przecinku.

W podrozdziale 10.4, korzystając z metod *rachunku całkowego*, wyznaczamy dokładną wartość stałej $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

8.4 Wypukłość funkcji

Dla funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ i dowolnej pary punktów $x_1, x_2 \in J$ ($x_1 \neq x_2$) rozważamy funkcję liniową

$$L_{x_1, x_2}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

jedyną, której wykres przechodzi przez punkty $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2$.

Definicja 8.4.1. Funkcję $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą w przedziale J , jeśli zachodzi nierówność $L_{x_1 x_2}(x) \geq f(x)$ dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in J$ ($x_1 < x_2$) i dowolnego $x \in (x_1, x_2)$. Nierówności $L_{x_1 x_2}(x) \leq f(x)$ dla dowolnych $x, x_1, x_2 \in J$ takich, że $x_1 < x < x_2$, oznaczają, że funkcja f jest wklęsła.

Funkcja f jest ściśle wypukła, jeśli $L_{x_1 x_2}(x) > f(x)$, a ściśle wklęsła, jeśli $L_{x_1 x_2}(x) < f(x)$, dla każdej trójki liczb $x_1 < x < x_2$ w przedziale J .

Uwaga 8.4.1. Wypukłość funkcji f oznacza, że dla każdej pary $x_1 < x_2$ wykres funkcji $f|_{[x_1, x_2]}$ leży poniżej odcinka siecznej o końcach $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$. Geometryczna interpretacja wypukłości funkcji jest równoważna wypukłości zbioru $\{(x, y) \in J \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$. Ponieważ wklęsłość funkcji f jest równoważna wypukłości funkcji $-f$, ograniczymy się w zasadzie do badania funkcji wypukłych.

Ciekawe i ważne własności funkcji wypukłych są w dużej mierze konsekwencją następującej, nieco zaskakującej symetrii

Lemat 8.4.1. Dla $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnych trzech punktów $x_1, x_2, x_3 \in J$ takich, że $x_1 < x_2 < x_3$, warunek wypukłości $f(x_2) \leq L_{x_1 x_3}(x_2)$ jest równoważny każdej z nierówności:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (8.21)$$

Warunek ścisłej wypukłości jest równoważny każdej z analogicznych nierówności ostrych.

Podkreślamy, że trzecia nierówność, formalnie wynikająca z pierwszych dwu nierówności, jest równoważna każdej z nich.

Dowód. Proste ćwiczenie. □

W przypadku funkcji różniczkowalnej zachodzi

Twierdzenie 8.4.2. Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą, różniczkowalną we wnętrzu J^o przedziału J . Wówczas

(i) funkcja f jest wypukła w $J \iff$ pochodna f' jest niemalejąca w J^o , oraz

(ii) funkcja f jest wklęsła w $J \iff$ pochodna f' jest nierosnąca w J^o .

Jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w J^o , to

(iii) $f'' \geq 0 \implies f$ jest wypukła w J ,

(iv) $f'' \leq 0 \implies f$ jest wklęsła w J .

Dowód. (i) Załóżmy, że pochodna f' jest funkcją niemalejącą. Dla dowolnych $x, x_1, x_2 \in J$ takich, że $x_1 < x < x_2$, istnieją liczby $c_1 \in (x_1, x)$ i $c_2 \in (x, x_2)$ takie, że

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

gdzie nierówność pomiędzy pochodnymi wynika z monotoniczności f' . Zgodnie z Lematem 8.4.1 otrzymana nierówność oznacza $f(x) \leq L_{x_1 x_2}(x)$.

Założmy teraz, że funkcja f jest wypukła. Dla dowolnych $x_1, x_2 \in J^o$ takich, że $x_1 < x_2$, rozważmy dowolny punkt x z przedziału (x_1, x_2) . Założenie wypukłości oznacza nierówności

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

a różniczkowalność funkcji f pozwala przejść do granicy, co daje

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{i} \\ f'(x_2) &= \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Zatem $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ dla dowolnych $x_1 < x_2$.

Własność (ii) otrzymujemy z udowodnionej własności (i) dla funkcji $-f$. Zgodnie z Twierdzeniem 8.3.7, jeśli istnieje druga pochodna f'' , jej znak decyduje o monotoniczności funkcji f' . Własności (iii)–(iv) wynikają zatem z (i)–(ii). \square

Ćwiczenie 8.4.1. Sprawdzić, że funkcja $\sqrt{x^2 + x + 1} + x, x \in \mathbb{R}$, badana w Przykładzie 7.4.4 jest ściśle wypukła.

Uwaga 8.4.2. Założenie ścisłej monotoniczności pochodnej f' prowadzi do analogicznego twierdzenia, charakteryzującego funkcje ściśle wypukłe i ściśle wklęsłe. Uważny czytelnik jest zapewne w stanie samodzielnie sformułować i udowodnić alternatywną *ściśłą* wersję twierdzenia. Dodatkową wskazówką może być fakt, iż własności funkcji ściśle wypukłych badane są także w kolejnych twierdzeniach bieżącego podrozdziału.

Ważne praktyczne znaczenie wypukłości funkcji opisuje

Twierdzenie 8.4.3 (Podstawowa nierówność dla funkcji wypukłej). *Założmy, że $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją wypukłą. Dla każdego ciągu $x_i \in J$, $i \leq n$, i dowolnych nieujemnych współczynników a_i , takich że $\sum_{i \leq n} a_i = 1$, zachodzi nierówność*

$$f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n). \quad (8.22)$$

Dowód. Ponieważ przypadek $n = 1$ jest trywialny, zauważmy, że dla $n = 2$ i dowolnych różnych liczb $x_1, x_2 \in J$ punkt $x = a_1x_1 + a_2x_2$ leży w przedziale o końcach x_1 i x_2 , przy czym

$$a_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Wynikająca z Definicji 8.4.1 nierówność $f(x) \leq L_{x_1x_2}(x) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$ jest tożsama z (8.22) (dla $n = 2$).

Przypadek ogólny wynika z zasady indukcji. Istotnie, jeśli założymy, że nierówność (8.22) zachodzi dla $n = k \geq 2$, to dla $n = k + 1$ dowolne $(k + 1)$ -elementowe ciągi $(x_i)_{i \leq n}$ i $(a_i)_{i \leq n}$ możemy „skrócić” przyjmując $a'_k = a_k + a_{k+1}$ i $x'_k = \frac{a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1}}{a_k + a_{k+1}}$. Dla otrzymanych w ten sposób ciągów k -elementowych mamy

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ix_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^k a_ix_i + a'_kx'_k\right) \leq \sum_{i=1}^k a_if(x_i) + a'_kf(x'_k),$$

gdzie ostatni składnik spełnia nierówność $f(x'_k) \leq \frac{a_k}{a_k}f(x_k) + \frac{a_{k+1}}{a_k}f(x_{k+1})$. \square

Ćwiczenie 8.4.2. Sprawdzić wypukłość funkcji potęgowej $x^s, x \geq 0$, dla wykładników $s \geq 1$, oraz funkcji wykładniczej $a^x, x \in \mathbb{R}$, dla podstawy $a \geq 1$. Wykazać nierówność

$$x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \leq a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad \text{jeśli } \sum_{i \leq n} a_i = 1 \text{ i } \forall_i a_i \geq 0,$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Traktując Twierdzenie 8.4.2 jako uzasadnienie włączenia do bieżącego rozdziału tematu wypukłości funkcji, zbadamy teraz dokładniej ciągłość i różniczkowalność *dowolnych* funkcji wypukłych. Pomagają nam w tym czytelne analogie z Twierdzeniem 7.5.2 oraz własności ilorazu różnicowego funkcji f traktowanego jako funkcję przyrostową jednej ze zmiennych,

$$f_t(x) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f_x(t) \quad \text{dla } x \neq t, x, t \in J.$$

Rozszerzając Lemat 8.4.1, wykazemy najpierw

Lemat 8.4.4. Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją wypukłą.

(i) Dla każdego $x \in J$ funkcja przyrostowa $f_x: J \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ jest nie-malejąca – rosnąca, jeśli funkcja f jest ściśle wypukła. W każdym punkcie wewnętrznym $x \in J^\circ$ istnieją pochodne jednostronne, przy czym

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \quad \text{dla } x \in J^\circ.$$

(ii) Dla dowolnych $x_1, x_2 \in J$, takich że $x_1 < x_2$, zachodzą nierówności

$$f_{x_1} \leq f_{x_2}, \quad (\text{odpow. } f_{x_1} < f_{x_2}) \text{ na zbiorze } J \setminus \{x_1, x_2\}, \quad \text{oraz}$$

$$\begin{aligned} f'_+(x_1) &\leq f_{x_1}(x_2) = f_{x_2}(x_1) \leq f'_-(x_2) \\ f'_+(x_1) &< f_{x_1}(x_2) = f_{x_2}(x_1) < f'_-(x_2), \quad \text{jeśli } f \text{ ściśle wypukła,} \end{aligned} \quad (8.23)$$

gdzie dopuszczamy także ewentualne nieskończone (niewłaściwe) wartości pochodnych na końcach przedziału J .

Dowód. (i) Dowód monotoniczności funkcji f_x wymaga sprawdzenia trzech przypadków. Dla trójki liczb $x < x_1 < x_2$ w J , z pierwszej nierówności (8.21) wynika nierówność $f_x(x_1) \leq f_x(x_2)$, jeśli natomiast $x_1 < x_2 < x$, to druga z nierówności (8.21) daje $f_x(x_1) \leq f_x(x_2)$. W przypadku, gdy $x_1 < x < x_2$, trzecia z nierówności (8.21) oznacza $f_x(x_1) \leq f_x(x_2)$. Jeśli funkcja f jest ściśle wypukła, wszystkie wykorzystane tu nierówności są ostre.

Dla $x \in J^\circ$ i dowolnych punktów $x_1, x_2 \in J$, takich że $x_1 < x < x_2$, z monotoniczności funkcji f_x (Lemat 7.5.1) wynika istnienie skończonych granic jednostronnych

$$f'_-(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x^-} f_x(x_1) \leq f_x(x_2), \quad \text{oraz}$$

$$f'_-(x) \leq \lim_{x_2 \rightarrow x^+} f_x(x_2) = f'_+(x),$$

co kończy dowód własności (i).

(ii) Dla $x_1 < x_2$, własność $f_{x_1} \leq f_{x_2}$ jest oczywistym wnioskiem z (i) i sprowadza się do nierówności $f_x(x_1) \leq f_x(x_2)$ dla $x \neq x_1, x_2$. Zatem

$$\begin{aligned} f'_+(x_1) &= \inf\{f_{x_1}(x); x_1 < x\} \leq f_{x_1}(x_2) \\ &= f_{x_2}(x_1) \leq \sup\{f_{x_2}(x); x < x_2\} = f'_-(x_2). \end{aligned}$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłej f , obie nierówności dotyczące kresów są ostre, gdyż

$$\inf\{f_{x_1}(x); x_1 < x\} \leq f_{x_1}(t) < f_{x_1}(x_2) < f_{x_2}(t) \leq \sup\{f_{x_2}(x); x < x_2\}$$

dla dowolnego punktu $t \in (x_1, x_2)$. □

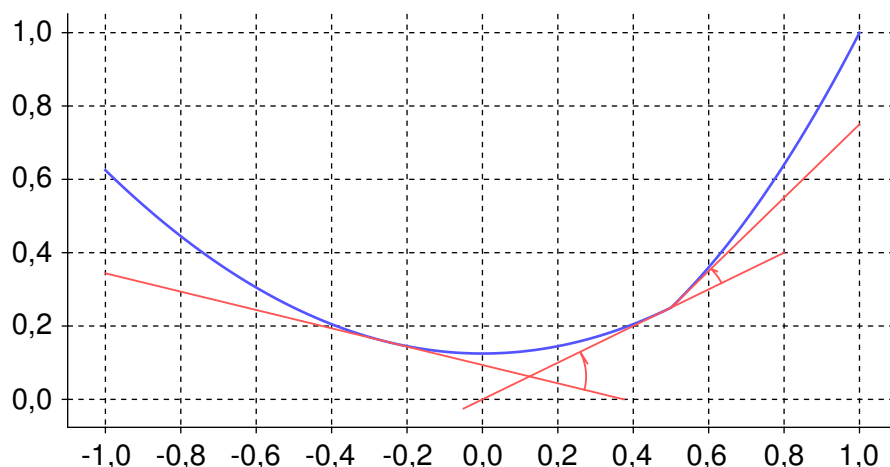
Wniosek 8.4.5 (Ciągłość funkcji wypukłej). *Funkcja wypukła $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale otwartym $J^\circ \subset J$. W punktach $t \in J \setminus J^\circ$ (końcowych) funkcja f jest ciągła, jeżeli istnieją odpowiednie pochodne jednostronne $f'_\pm(t)$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest wypukła. Zgodnie z Lematem 8.4.4, dla każdego punktu wewnętrznego $t \in J^\circ$ funkcja przyrostowa $f_t(x)$ posiada w $x = t$ skończone granice – prawo- i lewostronną. Z zależności (8.4) wynika zatem równość granic

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^-} (f(t) + (x - t)f'_-(t)) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x),$$

a to oznacza ciągłość funkcji f na J° . Jeśli $t \in J$ jest lewym końcem przedziału, ta sama zależność implikuje równość $f(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x)$, o ile tylko istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow t^+} f_t(x) = f'_+(t)$. Analogiczne rozumowanie wiąże ciągłość funkcji wypukłej f w prawym końcu przedziału z istnieniem pochodnej $f'_-(t)$, co kończy dowód. \square

Z Lematu 8.4.4 wynika też kolejna geometryczna własność funkcji wypukłej.



Rysunek 8.2: Funkcja ściśle wypukła nie wszędzie różniczkowalna

Stwierdzenie 8.4.6. *Wykres dowolnej funkcji wypukłej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ leży ponad każdą ze stycznych – w punktach różniczkowalności. Dla każdego punktu $t \in J^\circ$, w którym $f'_-(t) < f'_+(t)$, zachodzi nierówność $f \geq g_t$, gdzie*

$$g_t(x) = \begin{cases} f(t) + (x - t)f'_-(t) & \text{dla } x \leq t, \\ f(t) + (x - t)f'_+(t) & \text{dla } x \geq t. \end{cases}$$

Funkcja ściśle wypukła ma z każdą ze swych stycznych dokładnie 1 punkt wspólny – punkt styczności.

Dowód. Dla dowolnych liczb $x_1 < t < x_2$ w przedziale J z (8.23) wynikają nierówności

$$f_t(x_1) \leq f'_-(t) \leq f'_+(t) \leq f_t(x_2).$$

Stąd $f(x_1) \geq f(t) + (x_1 - t)f'_-(t)$ i $f(x_2) \geq f(t) + (x_2 - t)f'_+(t)$, przy czym nierówności te są ostre, jeśli funkcja f jest ściśle wypukła. \square

Listę związanych z ciągłością własności funkcji wypukłych kończy

Twierdzenie 8.4.7 (O różniczkowalności funkcji wypukłej). *Niech f będzie dowolną funkcją wypukłą na przedziale $J \subset \mathbb{R}$.*

(i) *Pochodna lewostronna f'_- jest funkcją lewostronnie ciągłą na J° , a pochodna prawostronna f'_+ : $J^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ – prawostronnie ciągłą. Ciągłość pochodnych rozszerza się na te z punktów końcowych przedziału J , w których odpowiednia pochodna istnieje. Funkcje f'_-, f'_+ są niemalejące, a w przypadku ścisłej wypukłości – rosnące.*

(ii) *Pochodna f' jest funkcją ciągłą na zbiorze $J^\circ \setminus N$, gdzie*

$$N = \{t \in J^\circ; f'_-(t) < f'_+(t)\},$$

a zatem także na całej swej dziedzinie. Zbiór N jest co najwyżej przeliczalny.

Dowód. Z Lematu 8.4.4 wynika, że obie pochodne jednostronne są funkcjami niemalejącymi. Do wyznaczania granic każdej z nich ma zatem zastosowanie Lemat 7.5.1. Aby wykazać, że granica lewostronna

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f'_-(x) = \sup\{f'_-(x); x < t\} \leq f'_-(t)$$

jest równa $f'_-(t) = \sup\{f_t(x); x < t\}$ dla $t \in J^\circ$, weźmy dowolny punkt $x < t$ w J . Z (8.23) wynika nierówność $f_t(x) \leq f'_-(x)$, a zatem równość $\lim_{x \rightarrow t^-} f'_-(x) = f'_-(t)$ i lewostronna ciągłość funkcji f'_- są konsekwencją Twierdzenia 2.1.4(ii). Dla granicy prawostronnej w $t \in J^\circ$, będącej kresem dolnym

$$\lim_{x \rightarrow t^+} f'_+(x) = \inf\{f'_+(x); x > t\} \geq f'_+(t) = \inf\{f_t(x); x > t\},$$

rozważamy dowolny punkt $x \in J$ taki, że $x > t$. Z nierówności $f_t(x) \geq f'_+(x)$ i Twierdzenia 2.1.4(iv) wynika równość kresów dolnych.

Dowód własności (ii) opiera się na równościach

$$f'_-(t) = \sup\{f'_+(x); x < t\} \quad \text{oraz} \quad f'_+(t) = \inf\{f'_-(x); x > t\},$$

które także są konsekwencją (8.23), a z których wynika, że N jest wspólnym zbiorem punktów nieciągłości funkcji f'_- i f'_+ . Poza N , każda z pochodnych jednostronnych jest funkcją ciągłą i jest równa f' . Przeliczalność zbioru N jest konsekwencją Twierdzenia 7.5.2. \square

Definicja 8.4.2. Punkt wewnętrzny $t \in J^\circ$ dziedziny funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy punktem przegięcia, jeśli istnieje pochodna $f'(t)$ i dla pewnej liczby $c > 0$ takiej, że $(t - c, t + c) \subset J$, jedna z funkcji $f|_{(t-c, t]}$ i $f|_{[t, t+c)}$ jest ściśle wypukła, a druga ściśle wklęsła.

Dodatkowym uzasadnieniem dla podanej tu nazwy jest następująca wynikająca ze Stwierdzenia 8.4.6 własność

Wniosek 8.4.8. W otoczeniu punktu przegięcia t wykres funkcji przecina styczną przechodząc w punkcie t na drugą jej stronę. \square

Przykład 8.4.1. Punktami przegięcia funkcji sinus są liczby $x = k\pi$ dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Charakteryzację punktów przegięcia funkcji różniczkowalnej zawiera

Twierdzenie 8.4.9. Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą określoną i różniczkowalną na przedziale otwartym $J \subset \mathbb{R}$.

(i) [Równoważność] Liczba $t \in J$ jest punktem przegięcia funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna f' zmienia w t charakter monotoniczności, tzn. istnieje przedział $(t - c, t + c) \subset J$, taki że na jednym z przedziałów $(t - c, t]$, $[t, t + c)$ pochodna jest funkcją rosnącą, a na drugim – malejącą.

(ii) [Warunek konieczny] W punkcie przegięcia t funkcja f' ma ściśle ekstremum lokalne. Jeśli istnieje druga pochodna $f''(t)$, to zachodzi równość $f''(t) = 0$.

(iii) [Warunki dostateczne] Jeśli dla pewnego $c > 0$ funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $(t - c, t) \cup (t, t + c) \subset J$, przy czym na jednym z przedziałów pochodna f'' jest dodatnia, a na drugim – ujemna, to t jest punktem przegięcia funkcji f . W szczególności, $t \in J$ jest punktem przegięcia, jeśli $f''(t) = 0$ i istnieje różna od 0 trzecia pochodna $f'''(t) = (f'')'(t)$.

Dowód. Ćwiczenie. Poszczególne własności wynikają z wcześniejszych twierdzeń dotyczących monotoniczności funkcji i punktów krytycznych – w zastosowaniu do pochodnej f' . \square

8.5 Reguła de L'Hôpitala

Jak do tej pory granice funkcji były przez nas wykorzystywane do wyznaczania (i definicji) pochodnej. Odwrotne podejście wiąże się z grupą twierdzeń znanych pod wspólną nazwą zawartą w tytule bieżącego podrozdziału. Punktem wyjścia jest następujące uogólnienie Twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie 8.5.1 (Cauchy'ego o wartości średniej). *Dla dowolnych funkcji ciągłych $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnych w przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba $c \in (a, b)$ taka, że*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Dowód. Jeśli $g(b) = g(a)$, dowiedziona równość zachodzi dla c takiego, że $g'(c) = 0$. Twierdzenie Rolle'a możemy zastosować także w przypadku, gdy $g(b) \neq g(a)$, dla funkcji $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$F(x) = f(x) - f(a) - s(g(x) - g(a)), \quad \text{gdzie} \quad s = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Wówczas $F(a) = 0 = F(b)$, a więc dla pewnego $c \in (a, b)$ zachodzi równość $F'(c) = 0$, czyli $sg'(c) = f'(c)$, co było do okazania. \square

Sygnalizowana grupa twierdzeń dotyczy metod wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych, czyli w pierwszej kolejności funkcji postaci $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, w punkcie t takim, że $f(t) = g(t) = 0$.

Twierdzenie 8.5.2 (Reguła de L'Hôpitala dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$). (i) *Niech $f, g: (a, t] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < t$) będą dowolnymi funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi w przedziale otwartym (a, t) i takimi, że $f(t) = 0 = g(t)$. Jeśli pochodna $g'(x)$ jest różna od 0 dla $x \in (a, t)$ i istnieje granica lewostronna $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, skończona lub nieskończona, to także funkcja $\frac{f}{g}$ ma w t granicę lewostronną i zachodzi równość*

$$\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (8.24)$$

(ii) *Jeśli funkcje ciągłe $f, g: [t, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($t < b$) takie, że $f(t) = 0 = g(t)$, są różniczkowalne w przedziale (t, b) , przy czym $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (t, b)$, to istnienie granicy prawostronnej $\lim_{x \rightarrow t^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pociąga za sobą równość*

$$\lim_{x \rightarrow t^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow t^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (8.25)$$

a więc także istnienie odpowiedniej prawostronnej granicy (skończonej lub nieskończonej) funkcji $\frac{f}{g}$.

Dowód. (i) Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem w przedziale (a, t) zbieżnym do t . Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z Twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika równość

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(t)}{g(x_n) - g(t)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)},$$

gdzie $t_n \in (x_n, t)$. Skoro $x_n \rightarrow t$, to także $t_n \rightarrow t$ dla $n \rightarrow \infty$. Równość (8.24) wynika zatem z ciągowej charakteryzacji granicy lewostronnej.

W pełni analogiczny dowód własności (ii) pozostawiamy czytelnikowi. \square

Wniosek 8.5.3. *Jeśli funkcje $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne i*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

przy czym $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, \infty)$, to istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (skończony lub nie) pociąga za sobą równość

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (8.26)$$

a więc także istnienie granicy funkcji $\frac{f}{g}$. Analogiczna własność zachodzi dla granic w $-\infty$.

Dowód. Dla dowodu możemy założyć, że $a > 0$. Funkcje $F(x) = f(\frac{1}{x})$ oraz $G(x) = g(\frac{1}{x})$ dla $x \in (0, \frac{1}{a})$ mają ciągłe rozszerzenia na przedział $[0, \frac{1}{a})$ i spełniają założenia Twierdzenia 8.5.2(ii), a zatem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f'(\frac{1}{x})/x^2}{-g'(\frac{1}{x})/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Analogiczny dowód dla granic w $-\infty$ pomijamy. \square

Kolejna reguła dotyczy granic (jednostronnych) funkcji ilorazowej $\frac{f}{g}$, dla której granica licznika i mianownika jest nieskończona. Korzystając z idei dowodu zawartej w [2], wystarczy założyć, że funkcja g ma granicę nieskończoną.

Twierdzenie 8.5.4 (Reguła de L'Hôpitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$). (i) *Jeśli funkcje $f, g: (a, t) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < t$) są różniczkowalne i $\lim_{x \rightarrow t^-} |g(x)| = \infty$,*

przy czym pochodna g' ma stały znak, to istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (skończonej lub nie) implikuje istnienie granicy funkcji $\frac{f}{g}$ i równość

$$\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (8.27)$$

(ii) Jeśli dziedziną funkcji różniczkowalnych f, g jest przedział nieograniczony (a, ∞) , przy czym $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty$, a pochodna g' ma stały znak, to istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (skończonej lub nie) pociąga za sobą równość

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (8.28)$$

a więc także istnienie granicy funkcji $\frac{f}{g}$ w nieskończoności.

Sformułowanie analogicznej reguły dla granic prawostronnych (oraz granic w $-\infty$) pozostawiamy czytelnikowi.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla obu wariantów twierdzenia jednocześnie. W tym celu przyjmujemy, że wielkość $t \in \mathbb{R}$ oznacza liczbę rzeczywistą $t > a$ w przypadku (i), natomiast w przypadku (ii) $t = \infty$, a granica funkcji jest także granicą lewostronną. Zamieniając ewentualnie parę funkcji (f, g) na $(-f, -g)$, możemy założyć, że pochodna g' jest dodatnia, a funkcja g rośnie do $+\infty$, co pociąga za sobą nierówność $g(x) > 0$ dla dostatecznie dużych $x < t$. Bez zmniejszania ogólności zakładamy zatem, że g jest funkcją dodatnią na przedziale $(a', t) \subset (a, t)$.

Założmy, że istnieje skończona granica $c = \lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Oznacza to, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $a_1 \in (a', t)$ taka, że

$$c - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < c + \varepsilon, \quad \text{czyli} \quad (c - \varepsilon)g'(x) < f'(x) < (c + \varepsilon)g'(x)$$

dla $x \in (a_1, t)$. Funkcje $\varphi_\varepsilon = f - (c - \varepsilon)g$ i $\psi_\varepsilon = (c + \varepsilon)g - f$ mają w przedziale (a_1, t) dodatnie pochodne, co oznacza, że są w tym przedziale rosnące. Ponieważ funkcja g rośnie do ∞ , własność ta przenosi się na każdą z funkcji

$$\varphi_{2\varepsilon} = \varphi_\varepsilon + \varepsilon g \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \psi_{2\varepsilon} = \psi_\varepsilon + \varepsilon g \rightarrow \infty$$

dla $x \rightarrow t^-$. Wynika stąd istnienie liczby $a_2 \in (a_1, t)$ takiej, że $\varphi_{2\varepsilon}(x) > 0$ i $\psi_{2\varepsilon}(x) > 0$ dla $x > a_2$, co daje nierówność

$$c - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + 2\varepsilon \quad \text{dla } x \in (a_2, t).$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

Jeśli granica $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jest równa $+\infty$, to dla dowolnego $M \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $a_1 \in (a', t)$ taka, że

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M, \quad \text{czyli} \quad f'(x) > Mg'(x)$$

dla $x \in (a_1, t)$. Funkcja $\varphi_M = f - Mg$ jest zatem w przedziale (a_1, t) rosnąca, a funkcja $\varphi_{M+1} = \varphi_M + g$ rośnie do ∞ . Wynika stąd istnienie liczby $a_2 \in (a_1, t)$ takiej, że $\varphi_{M+1}(x) > 0$ dla $x > a_2$, czyli

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M + 1 \quad \text{dla } x \in (a_2, t),$$

a to oznacza istnienie granicy niewłaściwej $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Dowód w przypadku, gdy $\lim_{x \rightarrow t^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$ przebiega analogicznie. \square

Przykład 8.5.1. Reguły de L'Hôpitala pozwalają wyznaczyć granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

Stąd granice $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$ – wyznaczone wcześniej w Twierdzeniu 7.3.7.

Stwierdzenie 8.5.5. Dla dowolnej funkcji wielomianowej P istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)e^{-x} = 0. \quad (8.29)$$

Dowód. Równość (8.29) wykazujemy, korzystając z indukcji względem stopnia $n = \deg P$ wielomianu P – zaczynając od $n = 0$, gdy dowiedziona własność wynika z (7.11) dla $a = e$. Załóżmy zatem, że granica $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)e^{-x}$ istnieje i jest równa 0 dla każdego wielomianu Q stopnia $n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego wielomianu P stopnia n , stosując regułę de L'Hôpitala (8.28) otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P'(x)}{e^x} = 0,$$

gdyż $\deg P' = n-1$ i $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. \square

Uwaga 8.5.1. Inne przypadki nieoznaczoności obejmują sytuacje, w których istnienie granicy (i sama granica) funkcji będącej wynikiem działania na parze funkcji (f, g) nie zależy jednoznacznie od zbieżności i wartości granic f i g . Nieoznaczoność typu $0 \cdot \infty$ dotycząca granicy iloczynu $f(x)g(x)$, gdy jedna z funkcji ma w $t \in \overline{\mathbb{R}}$ granicę równą 0, a druga $\pm\infty$, może być sprowadzona do postaci ilorazowej

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)},$$

czyli $0/0$ lub ∞/∞ . Dla nieoznaczoności typu $\infty - \infty$ analogiczne przekształcenie prowadzi do ilorazu

$$f(x) - g(x) = \frac{(1/g(x)) - (1/f(x))}{1/(f(x)g(x))}$$

i nieoznaczoności $0/0$. Nieoznaczoności związane z potęgowaniem, a więc 0^0 , czy też rozważane w Przykładzie 8.5.1 nieoznaczoności typu 1^∞ i ∞^0 sprowadza się do poprzednich poprzez logarytmowanie.

8.6 Pochodne wyższych rzędów

Ograniczając się do funkcji rzeczywistych określonych na dowolnym przedziale $J \subset \mathbb{R}$, przyjmujemy:

Definicja 8.6.1. *Funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 , jeśli jest różniczkowalna i jej pochodna $f': J \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.*

Dla dowolnej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$ przyjmujemy, że funkcja f jest klasy C^{k+1} jeśli f jest klasy C^1 i jej pochodna f' jest klasy C^k .

Zbiór wszystkich funkcji klasy C^k na przedziale J oznaczamy $C^k(J)$.

Dla ujednolicenia terminologii, przez $C^0(J)$ oznacza się zbiór funkcji ciągłych na J , czyli funkcji klasy C^0 . Z drugiej strony, wychodząc od zdefiniowanego wcześniej pojęcia (jednokrotnej) różniczkowalności funkcji, wprowadza się naturalne, iteracyjne rozszerzenie:

Definicja 8.6.2. (i) *Dla $k \in \mathbb{N}$, pochodną rzędu k funkcji $f \in C^k(J)$ nazywamy funkcję $f^{(1)} = f'$, gdy $k = 1$, oraz*

$$f^{(k)} = (f')^{(k-1)}, \quad \text{gdy } k \geq 2.$$

(ii) *Dla $k \geq 2$ funkcję $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy k -krotnie różniczkowalną, gdy $f \in C^{k-1}(J)$ i pochodna $f^{(k-1)} \in C^0(J)$ jest funkcją różniczkowalną. Funkcję $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ nazywamy wówczas k -tą lub k -krotną pochodną funkcji f .*

(iii) *Dla $k \geq 2$ funkcja f jest k -krotnie różniczkowalna w punkcie $t \in J$, jeśli istnieje $c > 0$ takie, że f jest $(k-1)$ -krotnie różniczkowalna w otoczeniu $J' = (t - c, t + c) \cap J$ i istnieje pochodna $f^{(k)}(t) := (f|_{J'}^{(k-1)})'(t)$.*

Uwaga 8.6.1. Powszechnie używane są oznaczenia $f^{(0)} = f$, oraz $f'' = f^{(2)}$ i $f''' = f^{(3)}$ dla drugiej (f-bis) i trzeciej (f-ter) pochodnej. Alternatywnym oznaczeniem pochodnej rzędu $k \in \mathbb{N}$ jest

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} \right|_{x=t} f(x) = f^{(k)}(t). \quad (8.30)$$

Ponieważ k -ta pochodna powstaje w wyniku iteracji pochodnej rzędu 1, zachodzi równość $f^{(k)} = (\dots (f')' \dots)'$, a zatem

$$(f^{(k)})^{(l)} = f^{(k+l)} \quad \text{dla } k, l \in \mathbb{N}.$$

Przykład 8.6.1. (i) Funkcja wykładnicza e^x dla $x \in \mathbb{R}$ jest klasy C^k dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\left. \frac{d^k}{dx^k} \right|_{x=t} e^x = e^t$ dla każdego t .

(ii) Funkcje *sinus* i *kosinus* są dowolnie wiele razy różniczkowalne, przy czym

$$\sin^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \cos(x) \quad \text{i} \quad \sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x),$$

oraz

$$\cos^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin(x) \quad \text{i} \quad \cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 8.6.3. Funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ , jeśli jest klasy C^k dla każdej liczby naturalnej k .

Zbiór wszystkich funkcji klasy C^∞ na przedziale J oznaczamy $C^\infty(J)$. Z Twierdzenia 8.1.4 wynika

Wniosek 8.6.1. Dla dowolnego szeregu potęgowego $(\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$ o promieniu zbieżności $\rho > 0$ i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ funkcja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{dla } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \quad (8.31)$$

jest funkcją klasy C^∞ .

Dowód. Funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-\rho, \rho)$ jest funkcją klasy C^∞ . Własność ta przenosi się na sumę szeregu (8.31) równą $f(x - x_0)$. \square

Definicja 8.6.4. Dla dowolnej funkcji f klasy C^∞ w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ każda równość postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{dla } x \in (x_0 - c, x_0 + c), \quad (8.32)$$

gdzie $c > 0$, nazywamy rozwinięciem w szereg potęgowy o środku x_0 .

Wniosek 8.6.2. *Jeśli funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ma rozwinięcie w szereg potęgowy o środku w punkcie $x_0 \in J$, to współczynniki rozwinięcia opisują wzory*

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big|_{x=x_0} f(x) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \quad (8.33)$$

Dowód. Stosując k -krotnie Twierdzenie 8.1.4, otrzymujemy dla $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (x-x_0)^n.$$

Stąd $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$. Dla a_0 równość (8.33) jest oczywista. \square

Uwaga 8.6.2. Z udowodnionego właśnie wniosku wynika, że warunkiem koniecznym na to by funkcja f klasy C^∞ posiadała rozwinięcie w szereg potęgowy o środku w x_0 jest niezerowy promień zbieżności szeregu o współczynnikach danych przez (8.33). Zgodnie z kryterium Cauchy'ego i Wnioskiem 5.4.4, oznacza to istnienie skończonej granicy $\limsup_n \sqrt[n]{f^{(n)}(x_0)/n!}$. Nie jest to jednak warunek dostateczny.

Twierdzenie 8.6.3. *Dla dowolnego $a > 1$ funkcja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \leq 0, \\ a^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (8.34)$$

jest klasy C^∞ , ale nie ma rozwinięcia w szereg potęgowy o środku w 0.

Ze względu na tożsamość $a^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\ln(a)}{x}} = e^{-\frac{1}{x/\ln(a)}}$, możemy – bez istotnego zmniejszenia ogólności – ograniczyć się do przypadku $a = e$. Skorzystamy z pomocniczego twierdzenia dotyczącego ciągłości.

Lemat 8.6.4. *Dla dowolnego wielomianu P zmiennej $x \in \mathbb{R}$ i liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Dowód. Z równości (8.29) i Lematu 7.3.4 wynika istnienie granicy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Stąd wyprowadzamy równość $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = P(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. \square

Dowód Twierdzenia 8.6.3. Zgodnie z wcześniejszą umową ustalamy $a = e$. Pochodną $\varphi'(0)$ wyznaczamy jako wspólną wartość granic

$$\varphi'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = \varphi'_-(0),$$

a to oznacza różniczkowalność funkcji φ i równość

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Korzystając z zasady indukcji wykażemy, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ pochodna $\varphi^{(n)}$ jest funkcją ciągłą postaci

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \leq 0, \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0, \end{cases} \quad (8.35)$$

gdzie P_n jest wielomianem. Istotnie, wzór (8.35) opisuje funkcję ciągłą, której pochodna dla $x > 0$ wyraża się wzorem

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\frac{xP'_n(x) - nP_n(x)}{x^{n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{n+2}} \right) e^{-\frac{1}{x}},$$

co oznacza potwierdzenie wzoru (8.35) dla $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + (1-nx)P_n(x)$. Różniczkowalność funkcji $\varphi^{(n)}$ w $x = 0$ wynika z Lematu 8.6.4.

Funkcja φ nie jest rozwijalna w szereg potęgowy o środku w $x = 0$, gdyż $\varphi^{(n)}(0) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. \square

8.7 Badanie funkcji

Celem *badania funkcji rzeczywistej* $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozpoznanie charakterystycznych punktów związanych z wykresem funkcji, wyznaczenie wartości i granic w wyróżnionych punktach (także – w $\pm\infty$), oraz wskazanie przedziałów z jednoznacznie opisanym zachowaniem funkcji. A wszystko to po to, by móc przygotować „szkic wykresu”, a więc by w miarę dokładnie dowiedzieć się – jak badana funkcja wygląda. Miało to duże znaczenie w czasach „przed-komputerowych”, ale chcemy też zwrócić uwagę czytelnika na to, że sam rysunek – bez precyzyjnej analizy – może mylić i sugerować własności, których badana funkcja nie posiada.

Poznany do tej pory zbiór charakterystycznych punktów i własności funkcji obejmuje: - ustalenie dziedziny w sytuacji, gdy znany jest tylko wzór funkcji lub wtedy, gdy dziedzina opisana jest przez układ warunków (nierówności);

- miejsca zerowe, punkty krytyczne, wartości w punktach krytycznych, wartości pochodnych w punktach przecięcia wykresu z osiami współrzędnych;
- punkty nieciągłości oraz granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziału określoności, asymptoty;
- przedziały, gdzie funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności funkcji, różniczkowalność;
- przedziały wypukłości (lub wklęsłości) funkcji, punkty przegięcia i styczne w punktach przegięcia.

Ćwiczenie 8.7.1. Dokończyć proces badania funkcji $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ dla $x \neq \pm 1$, rozpoczęty w Przykładzie 7.4.5 (Rys. 7.1). Sprawdzić poprawność wzorów

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

i wyznaczyć lokalne ekstrema oraz przedziały monotoniczności, a także punkt przegięcia i przedziały, w których funkcja jest wypukła (ewent. wklęsła).

Przykład 8.7.1. Funkcja wymierna $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x-1}$ jest określona dla wszystkich $x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, przy czym jedynym jej miejscem zerowym jest $x_0 = 1$. Oznaczmy przez $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618$ i $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$ punkty nienależące do dziedziny funkcji, w których f ma asymptoty pionowe. W wyniku dzielenia wyodrębniamy część liniową, $f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+x-1}$, co oznacza, że prosta $y = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną. Wzory opisujące pochodne

$$f'(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x - 1)^2} \quad \text{ i } \quad f''(x) = \frac{4(x^3 - 3x^2 - 1)}{(x^2 + x - 1)^3}$$

dla $x \neq x_1, x_2$, pozwalają nawet na dokładne wyznaczenie miejsc zerowych, co w praktyce rzadko się zdarza. Dla przykładu, równanie $f'(x) = 0$ wyróżniające punkty krytyczne można sprowadzić do postaci

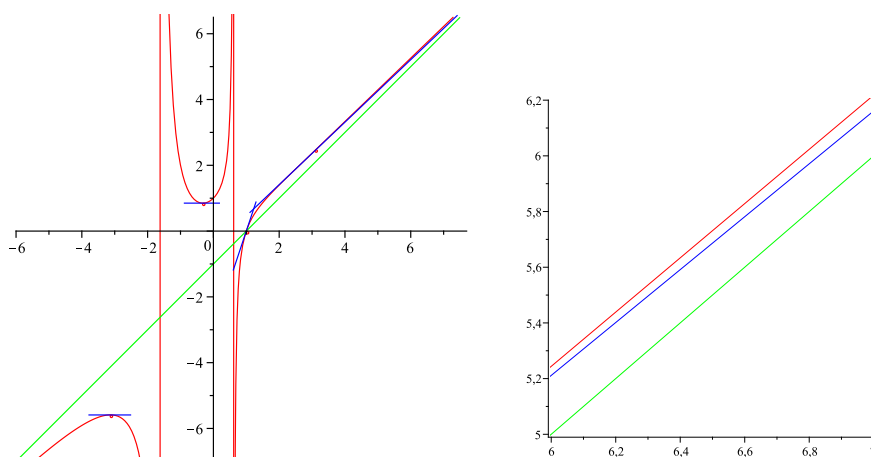
$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0,$$

a to oznacza, że suma $t = x + \frac{1}{x}$ jest pierwiastkiem równania $t^2 + 2t - 3 = 0$. Zatem $t = -1 \pm \sqrt{6}$ i funkcja f ma dwa punkty krytyczne

$$x_3 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{6} + \sqrt{3+2\sqrt{6}}\right), \quad x_4 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{6} - \sqrt{3+2\sqrt{6}}\right),$$

których przybliżone wartości wynoszą $x_3 \approx -3,1300$ i $x_4 \approx -0,3195$. Miejscem zerowym drugiej pochodnej i ewentualnym punktem przegięcia jest

$$x_5 = \frac{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}}{2} + \frac{2}{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}} + 1 \approx 3,1038.$$



Rysunek 8.3: Wykres funkcji wymiernej (w powiększeniu)

Porządkowanie i uzupełnianie zebranej już wiedzy o funkcji f może np. przybrać postać tabeli, w której $x_3 < x_1 < x_4 < x_2 < x_0 < x_5$ (por. Tabela 8.1). Szczegółowe wyliczenia wielkości umieszczonych w tabeli pomijamy

	$(-\infty, x_3)$	x_3	(x_3, x_1)	(x_1, x_4)	x_4	(x_4, x_2)	(x_2, x_0)	x_0	(x_0, x_5)	x_5	(x_5, ∞)
f''	-	-	-	+	+	+	-	-	-	0	+
f'	$1 \searrow$	0	$\searrow -\infty$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow \infty$	$\infty \searrow$	3	\searrow	0,95	$\nearrow 1$
f	$-\infty \nearrow$	-5,59	$\searrow -\infty$	$\infty \searrow$	0,85	$\nearrow \infty$	$-\infty \nearrow$	0	\nearrow	2,46	$\nearrow \infty$

Tabela 8.1: Badanie funkcji

(tzn. pozostawiamy czytelnikowi). Rysunek 8.3 zawiera oprócz fragmentu wykresu badanej funkcji także wyróżnione punkty krytyczne i punkt przecięcia, oraz asymptoty i część stycznych w wyróżnionych punktach.

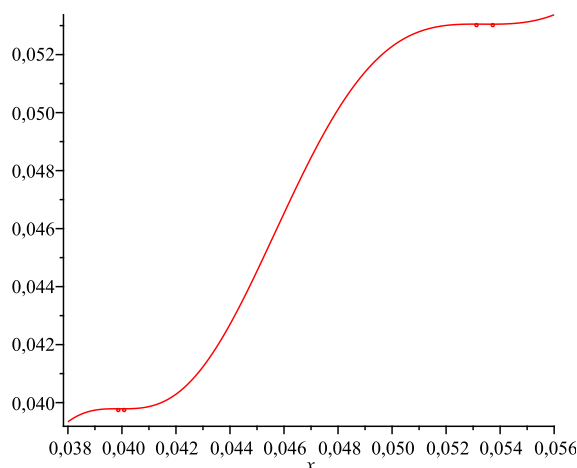
Przykład 8.7.2. Sygnalizowaliśmy wcześniej, że funkcja $g(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ z Przykładu 8.3.1 *robi wrażenie* monotonicznej. Szczegółowa analiza pochodnej

$$g'(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{1}{2x}\right) + 4x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) \cos\left(\frac{1}{2x}\right)$$

dla $x \neq 0$, dowodzi, że oprócz punktów krytycznych, dla których $\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 0$, czyli $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, istnieje jeszcze drugi ciąg postaci $y_k = \frac{1}{2(k\pi - c_k)} > x_k$ złożony z punktów spełniających równanie

$$\sin\left(\frac{1}{2y_k}\right) + 2y_k \cos\left(\frac{1}{2y_k}\right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}(c_k) = \frac{1}{k\pi - c_k},$$

przy czym $0 < c_k < \frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Odległości $y_k - x_k$ pomiędzy punktami x_k , w których funkcja g ma lokalne maksimum, a punktami y_k , w których g ma lokalne minimum, są na tyle małe, że kolejne bliskie punkty ekstremalne trudno rozróżnić na wykresie (por. Rysunek 8.4). Korzystając z nierówności



Rysunek 8.4: Punkty krytyczne x_3, x_4 (maksima) i y_3, y_4 (minima)

$c_k < \operatorname{tg}(c_k)$, można uzyskać oszacowanie $c_k < \frac{1}{k\pi-1}$, a zatem

$$y_k - x_k < \frac{1}{2k\pi((k\pi)^2 - k\pi - 1)}$$

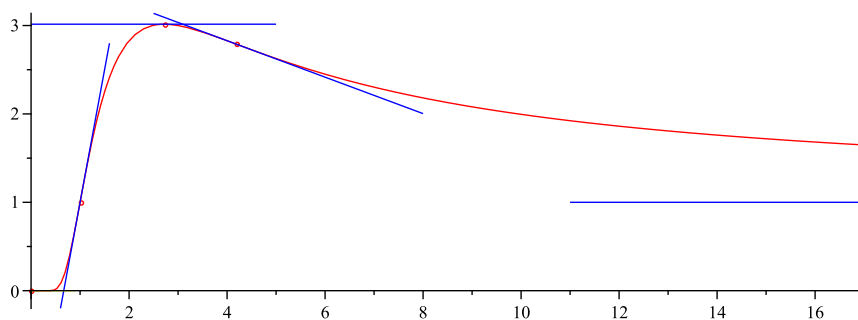
dla $k \in \mathbb{N}$. Załączony rysunek pokazuje na wykresie punkty $x_3 \approx 0,053052$ i $y_3 \approx 0,053660$ oraz $x_4 \approx 0,039789$ i $y_4 \approx 0,040043$ przy czym

$$g(x_3) \approx 0,053052 > g(y_3) \approx 0,053049 \quad \text{ i } \quad g(x_4) \approx 0,0397887 > g(y_4) \approx 0,0397881.$$

W każdym z przedziałów (x_k, y_k) i (y_{k+1}, x_{k+1}) funkcja g ma także punkt przegięcia.

Ćwiczenie 8.7.2. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji określonej wzorem $f(x) = |1 + \frac{1}{x}|^x$ dla $x \neq 0, -1$, $f(0) = 1$. Wyznaczyć minimum oraz przedziały wypukłości. Czy z powiększonego fragmentu wykresu w otoczeniu $x = 0$ można odczytać przybliżoną wartość pochodnej w $x = 0$?

Ćwiczenie 8.7.3. Wykres funkcji $x^{\frac{3}{x}}$ dla $x > 0$, rozszerzonej o wartość 0 w $x = 0$, prezentuje Rysunek 8.5. Funkcja ma maksimum globalne w $x = e$. Wyznaczyć przybliżone wartości pozostałych punktów charakterystycznych oraz równania prostych stycznych w punktach przegięcia.

Rysunek 8.5: Badanie funkcji $x^{3/x}$

Udowodnić*, że wszystkie pochodne badanej funkcji w $x = 0$ istnieją i są równe 0.

Ćwiczenie 8.7.4. Dla ustalonych liczb $a \in \mathbb{R}$ i $c > 0$ zbadać funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(|x|^{-c}) & \text{dla } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

W szczególności wykazać, że

- (a) f jest ciągła $\iff a > 0$,
- (b) $f'(0)$ istnieje $\iff a > 1$,
- (c) f' jest ograniczona $\iff a \geq 1 + c$,
- (d) f' jest ciągła $\iff a > 1 + c$,
- (e) $f''(0)$ istnieje $\iff a > 2 + c$,
- (f) f'' jest ograniczona $\iff a \geq 2 + 2c$,
- (g) f'' jest ciągła $\iff a > 2 + 2c$.

Porównać na wspólnym wykresie funkcje dla ustalonego c (np. $c = 0,7$) i wybranych wartości parametru a – uwzględniając wyszczególnione wyżej. Porównać wykresy pochodnych dla parametru a w pobliżu wartości $a = 1 + c$ oraz $a = 1 + 2c$.

Rozdział 9

Reszta czyli błąd

9.1 Wzór Taylora

Tytułowe dla podrozdziału twierdzenie (wzór) pozwala m.in. uzyskać warunek dostateczny dla rozwijalności w szereg potęgowy danej funkcji klasy C^∞ . Może to mieć ważne konsekwencje teoretyczne, o czym przekonaliśmy się w przypadku funkcji wykładniczej oraz funkcji trygonometrycznych. Duże znaczenie praktyczne ma także skończona, przybliżona postać rozwinięcia w szereg, dostępna dla funkcji o skończonej klasie gładkości C^n i pozwalająca na możliwie precyzyjną ocenę błędu.

Definicja 9.1.1. Dla $n \in \mathbb{N}$ i dowolnej funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ n -krotnie różniczkowalnej w punkcie $t \in J$, wielomian

$$T_t^n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad (9.1)$$

nazywamy wielomianem Taylora n -go stopnia funkcji f w t .

Ćwiczenie 9.1.1. Sprawdzić, że wielomian Taylora $T_t^n f$ jest jedynym wielomianem P stopnia nie większego niż n takim, że

$$P^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

Wielomian Taylora przybliża funkcję f (i jej wykres) w sposób podobny do opisanego w Twierdzeniu 8.1.1, gdzie bliska f funkcja liniowa jest równaniem stycznej.

Twierdzenie 9.1.1 (Peano, o reszcie). Dla $n \in \mathbb{N}$ i dowolnej funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ n -krotnie różniczkowalnej w punkcie $t \in J$, zachodzi równość

$$f(x) = T_t^n f(x) + r_t^n(x)(x-t)^n, \quad (9.3)$$

gdzie $r_t^n: J \setminus \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $\lim_{x \rightarrow t} r_t^n(x) = 0$.

Dla dowodu wykorzystamy elementarną własność wielomianów Taylora:

Lemat 9.1.2. Wielomiany Taylora funkcji f i f' wiążą tożsamość

$$\frac{d}{dx} T_t^n f(x) = T_t^{n-1} f'(x) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

jeśli funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w punkcie $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Obie strony są równe $\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1}$. □

Dowód Twierdzenia 9.1.1. Z (9.3) wynika prosty ilorazowy wzór na funkcję r_t^n , co umożliwia wyznaczenie granicy $\lim_{x \rightarrow t} r_t^n(x)$ w oparciu o regułę de L'Hôpitala. Zastosowanie Lematu 9.1.2 $n-1$ razy prowadzi do równości

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - T_t^n f(x)}{(x-t)^n} &= \lim_{x \rightarrow t} \frac{f'(x) - T_t^{n-1} f'(x)}{n(x-t)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_t^1 f^{(n-1)}(x)}{n!(x-t)} \\ &= \lim_{x \rightarrow t} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(t)}{x-t} - f^{(n)}(t) \right) = 0, \end{aligned}$$

gdzie dopiero istnienie ostatniej z granic potwierdza istnienie wszystkich wcześniejszych – i ich równość. □

Definicja 9.1.2. Wzór (9.3) nosi nazwę wzoru Taylora z resztą, czyli różnicą $R_t^n f(x) := f(x) - T_t^n f(x)$ w postaci Peano.

Bardziej precyzyjna postać reszty R_t^n wymaga mocniejszych założeń.

Twierdzenie 9.1.3 (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją n -krotnie różniczkowalną. Jeśli funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna we wnętrzu J° przedziału J , to dla dowolnych różnych punktów $x, t \in J$ istnieje liczba $\alpha \in (0, 1)$ taka, że

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, \quad (9.4)$$

gdzie $c = t + \alpha(x-t)$ jest punktem leżącym między t i x .

Twierdzenie pomija trywialny przypadek $x = t$, gdy wzór Taylora (9.4) redukuje się do równości $f(x) = f(t)$. Jeśli $x = t = c$ jest jednym z końców przedziału J , pochodna $f^{(n+1)}(c)$ nie musi istnieć.

Dowód. Ustalmy dowolne $t, b \in J$ takie, że $t < b$; niech F oznacza funkcję $f(x) - P(x) - s(x-t)^{n+1}$ dla $x \in [t, b]$, gdzie $P = T_t^n f$ jest wielomianem Taylora stopnia n , a liczba $s = \frac{f(b) - P(b)}{(b-t)^{n+1}}$ jest dobrana w ten sposób, by $F(b) = 0 = F(t)$.

Z Twierdzenia Rolle'a wynika, że dla pewnej liczby $c_1 \in (t, b)$ zachodzi równość $F'(c_1) = 0 = F'(t)$. Stosując ponownie Twierdzenie Rolle'a znajdujemy liczbę $c_2 \in (t, c_1)$ taką, że $F''(c_2) = 0$ (przy czym także $F''(t) = 0$ – jeśli $n > 1$).

Korzystamy tu z faktu, że F jest tej samej klasy gładkości co funkcja f , przy czym, zgodnie z (9.2), $F^{(k)}(t) = 0$ dla $k \leq n$. Kontynuując przedstawione tu rozumowanie, stwierdzamy po n -krokach istnienie liczby $c = c_{n+1} \in (t, c_n)$, dla której $F^{(n+1)}(c) = 0$. Ponieważ tak wysoka pochodna wielomianu Taylora P jest już zerem, otrzymujemy równość $f^{(n+1)}(c) = s(n+1)!$, czyli

$$f(b) = P(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-t)^{n+1}.$$

Ze względu na dowolność $b > t$ oznacza to koniec dowodu w przypadku $x > t$. Analogiczny dowód dla przypadku $x < t$ pozostawiamy czytelnikowi. \square

Przykład 9.1.1. Otrzymana wyżej postać Lagrange'a reszty we wzorze Taylora pozwala na szybki dowód rozwinięcia w szereg funkcji wykładniczej oraz funkcji *sinus* i *kosinus*. Wzór (9.4) daje oszacowanie

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \begin{cases} e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{dla } 0 < c < x, \\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} & \text{dla } x < c < 0. \end{cases}$$

W obu przypadkach zbieżność reszty do 0 wynika z Wniosku 5.2.7. Zauważmy, że o ile w przedziale $[-1, 0]$ podane wyżej oszacowanie błędu jest dokładnie takie, jakie wynika z kryterium Leibniza, w przypadku $x \in (0, 1]$ możemy wskazać lepsze oszacowanie, niekorzystające z (nieznanej) wartości e^x . Istotnie, porównując resztę z szeregiem potęgowym,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

otrzymujemy uogólnienie nierówności (3.16) postaci

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{x^{n+1}}{n \cdot n!} \quad \text{dla } x \in (0, 1] \text{ i } n \in \mathbb{N}. \quad (9.5)$$

Ćwiczenie 9.1.2. Sprawdzić, że ze wzoru Taylora wynika zbieżność poznanych wcześniej szeregów opisujących funkcje trygonometryczne.

Przykład 9.1.2. Znajdąc pochodne funkcji logarytmicznej,

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

z łatwością otrzymujemy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wzór Taylora

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \pm \frac{1}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c} \right)^{n+1} \quad \text{dla } x > -1,$$

gdzie $c = \alpha_n x$ leży między 0 a x – dla pewnego $\alpha_n \in (0, 1)$.

Wartość bezwzględna reszty Lagrange’a ma postać

$$r_n(x) = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c} \right)^{n+1} \right| \leq \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{dla } x \geq 0, \\ \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1} & \text{dla } x \in (-1, 0]. \end{cases}$$

Dla $x \geq 0$ reszta dąży do 0, jeśli $x \leq 1$, natomiast dla $x \in (-1, 0]$ odpowiedni warunek dostateczny zbieżności, $\frac{|x|}{1-|x|} \leq 1$, spełniony jest, gdy $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Ze wzoru Taylora i reszty w postaci Lagrange’a wynika zatem zbieżność $\lim_n r_n(x) \rightarrow 0$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Jest to wynik istotnie słabszy od udowodnionego wcześniej rozwinięcia (8.6) w przedziale $(-1, 1]$.

Kończąc bieżący podrozdział podpowiadamy twierdzenie uogólniające rozumowanie, na którym oparty został dowód wzoru Taylora (9.4).

Stwierdzenie 9.1.4 (Uogólnione Twierdzenie Rolle’a). *Dla dowolnego n naturalnego założmy, że funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest n razy różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) . Jeśli $f(x) = 0$ w $n+1$ różnych punktach $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, to istnieje liczba $c \in (x_0, x_n) \subset (a, b)$, taka że $f^{(n)}(c) = 0$.*

Dowód. **Ćwiczenie.** Wykazać, korzystając z klasycznego Twierdzenia Rolle’a, że każda z pochodnych $f^{(k)}$ dla $k \leq n$ znika w $n+1-k$ różnych punktach. \square

Uwaga 9.1.1. Uogólnienie wykorzystane we wzorze Taylora dopuszcza do rozważań $(m+1)$ -krotne miejsca zerowe dla $m \in \mathbb{N}$, czyli punkty x_i , dla których $f(x_i) = \dots = f^{(m)}(x_i) = 0$. W opisie można je interpretować także jako *niemalejące* ciągi liczb, w których wielokrotne miejsce zerowe oznacza fragment postaci $x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+m}$. Sformułować i udowodnić odpowiednią wersję Twierdzenia Rolle’a.

9.2 Szeregi dwumianowe

Twierdzenie 9.1.3 pozwala nam na podjęcie problemu rozwinięcia w szereg potęgowy *funkcji potęgowej* x^a dla $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ i $x > 0$. Podobnie jak dla logarytmu, skonstruujemy rozwinięcie *o środku w 1*, czyli dla funkcji $(1+x)^a$, $x > -1$. Przez analogię do klasycznego dwumianu Newtona przyjmujemy

Definicja 9.2.1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ niebędącej liczbą naturalną i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ współczynnikiem dwumianowym a po n nazywamy liczbę

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}. \quad (9.6)$$

Przyjmujemy także $\binom{a}{0} = 1$ dla $n = 0$, jako współczynnik a po 0.

Lemat 9.2.1 (Własności współczynników dwumianowych). Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$

- (i) $\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1} = \frac{a}{n+1} \binom{a-1}{n}$,
- (ii) $\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}$, oraz
- (iii) $\lim_n \left| \binom{a}{n} / \binom{a}{n+1} \right| = 1$, jeśli $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dowód. Własności (i) są raczej oczywiste – suma podana w (ii) jest zatem równa $(1 + \frac{a-n}{n+1})\binom{a}{n} = \frac{a+1}{n+1}\binom{a}{n} = \binom{a+1}{n+1}$. Zgodnie z (i), granica wskazana w (iii) wynosi $\lim_n \left| \frac{n+1}{a-n} \right| = 1$. \square

Korzystając z Przykładu 8.2.2 stwierdzamy, że funkcje $f_a(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$, łączy zależność $f_a^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)f_{a-n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, a zatem

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} \right|_{x=0} (1+x)^a = n! \binom{a}{n}$$

dla każdego n . Głównym celem bieżącego podrozdziału jest

Twierdzenie 9.2.2 (O szeregu dwumianowym). (i) Dla dowolnego wykładnika $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad (9.7)$$

jeśli $-1 < x < 1$.

(ii) Dla $a \geq 0$ równość (9.7) zachodzi w przedziale domkniętym $[-1, 1]$, a szereg jest zbieżny bezwzględnie.

(iii) Jeśli $a \in (-1, 0)$, szereg (9.7) jest w punkcie $x = 1$ warunkowo zbieżny.

Niezależnie od ewentualnej zbieżności, szereg potęgowy $(\sum \binom{a}{n} x^n)_{n \geq 0}$ nazywamy *szeregiem dwumianowym* o wykładniku a .

Dowód. W przypadku, gdy $a = 0$ lub $a \in \mathbb{N}$, równość (9.7) redukuje się do wzoru Newtona (Twierdzenie 1.2.3) i zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem wykluczyć ten przypadek z rozważań.

(i) Dla $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ badany szereg dwumianowy ma wszystkie współczynniki niezerowe, a z kryterium d'Alemberta – Wniosek 5.4.4 i Lemat 9.2.1(iii) – wynika, że ma promień zbieżności równy 1. Tym samym prawa strona równości (9.7) definiuje na przedziale $(-1, 1)$ funkcję $F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ klasy C^∞ . Aby porównać F_a i f_a skorzystamy ze wzoru Taylora (9.4). Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $x \in (-1, \infty)$ mamy

$$r_n(x) = \left| (1+x)^a - \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k \right| = \left| \binom{a}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-a}} \right|,$$

gdzie $c = \alpha x$ leży między 0 i x . Stąd oszacowanie

$$r_n(x) \leq \left| \binom{a}{n+1} \right| \cdot x^{n+1}, \quad \text{jeśli } n+1 > a \text{ i } 0 < c < x. \quad (9.8)$$

Kolejną konsekwencją spełnienia kryterium d'Alemberta (Wniosek 5.2.7) jest zatem zbieżność $\lim_n r_n(x) = 0$ dla każdego a i dowolnego $x \in (0, 1)$, co oznacza równość

$$(1+x)^a = F_a(x) \quad \text{dla } x \in (0, 1).$$

Podobnie jak w Przykładzie 9.1.2 wzór Taylora z resztą Lagrange'a nie daje rozszerzenia powyższej równości na cały przedział zbieżności. Skorzystamy zatem z tożsamości $f'_a(x) = \frac{a}{1+x} \cdot f_a(x)$ dla $x \in (-1, 1)$ i wykażemy, że analogiczną własność mają funkcje F_a . Istotnie, z poznanych własności szeregów potęgowych wynikają równości

$$(1+x)F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{a}{n+1} + \binom{a}{n} \right) x^n = F_{a+1}(x) \quad (9.9)$$

oraz

$$\begin{aligned} (1+x)F'_a(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{a}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) \binom{a}{n+1} + n \binom{a}{n} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((a-n) \binom{a}{n} + n \binom{a}{n} \right) x^n = aF_a(x) \end{aligned}$$

dla $x \in (-1, 1)$. Aby móc zinterpretować otrzymaną zależność jako własność funkcji $\ln F_a$, potrzebna jest nam jeszcze nierówność $F_a > 0$ – jak na razie potwierdzona dla $x \in [0, 1)$. Wobec tożsamości (9.9) możemy ograniczyć się do przypadku $-1 < a < 0$. Dla takich a i dla $x < 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zauważamy, że

$$\binom{a}{n} x^n = (-a)(1-a) \dots (n-1-a) \frac{|x|^n}{n!} > 0,$$

co potwierdza nierówność $F_a(x) > 0$ dla $x \in (-1, 0)$. Podsumowując, wykazaliśmy, że funkcje $\ln(F_a(x))$ i $\ln(f_a(x)) = a \ln(1+x)$ dla $x \in (-1, 1)$ mają tę samą pochodną

$$\frac{d}{dx} \ln(F_a(x)) = \frac{a}{1+x} = \frac{d}{dx} \ln(f_a(x)) \quad \text{dla } x \in (-1, 1),$$

a ponieważ mają też tę samą wartość 0 w $x = 0$, są równe – na mocy Wniosku 8.3.8.

(ii)* Dla dowodu bezwzględnej zbieżności szeregu dwumianowego (9.7) w końcach przedziału zbieżności rozważymy wstępnie przypadek $a \in (0, 1)$. Dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\left| \binom{a}{n} \right| = \frac{a(1-a) \dots (n-1-a)}{n!} = (-1)^{n-1} \binom{a}{n},$$

co w połączeniu z udowodnioną własnością (i) daje dla $x \in (-1, 1)$ tożsamość

$$(1-x)^a = F_a(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (-x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{a}{n} \right| x^n.$$

Dla $x \in (0, 1)$ prawdziwe są zatem nierówności

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{a}{n} \right| x^n = 1 - (1-x)^a < 1, \quad (9.10)$$

z których, po przejściu do kresu górnego względem x , wynika ograniczoność sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{a}{n} \right| \leq 1$. Rozumowanie to, z niewielkimi modyfikacjami, pozostaje prawdziwe dla dowolnego wykładnika $a > 0$. Ponieważ

współczynniki $\binom{a}{n}$ są dodatnie dla $n \leq n_a := \lfloor a \rfloor + 1$, a dla pozostałych n naturalnych zachodzi równość $\binom{a}{n} = (-1)^{n-n_a} |\binom{a}{n}|$, tożsamość

$$(1-x)^a = F_a(-x) = \sum_{k=0}^{n_a} \binom{a}{k} (-x)^k + (-1)^{n_a} \sum_{n=n_a+1}^{\infty} |\binom{a}{n}| x^n$$

proceedzi do oszacowania

$$\sum_{n=n_a+1}^{\infty} |\binom{a}{n}| x^n \leq (1-x)^a + \sum_{k=0}^{n_a} \binom{a}{k} x^k \leq 1 + \sum_{k=0}^{n_a} \binom{a}{k} \quad \text{dla } x \in (0, 1).$$

Stąd – po przejściu do kresu górnego względem x – wyprowadzamy ograniczoną sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} |\binom{a}{n}| \leq 1 + 2 \sum_{k=0}^{n_a} \binom{a}{k}$. Wynikająca z Twierdzenia 6.7.3(ii) ciągłość funkcji F_a na przedziale domkniętym $[-1, 1]$ uzasadnia równość $F_a(x) = (1+x)^a$ także dla $x = \pm 1$.

(iii)* Załóżmy, że $a = -b \in (-1, 0)$, gdzie $b > 0$. Wykażemy, że szereg naprzemienny $(\sum \binom{-b}{n})_{n \geq 0}$ spełnia kryterium Leibniza. Istotnie, zachodzi równość

$$\binom{-b}{n} = (-1)^n \frac{b(1+b) \cdots (n-1+b)}{n!} = (-1)^n |\binom{-b}{n}|,$$

przy czym $|\binom{-b}{n+1}| = |\binom{-b}{n}| \cdot \frac{n+b}{n+1} < |\binom{-b}{n}|$ dla $n \in \mathbb{N}$. Aby udowodnić zbieżność $\lim_n \binom{-b}{n} = 0$, wystarczy pokazać, że ciąg odwrotności jest rozbieżny do ∞ . Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} |\binom{-b}{n}|^{-1} &= \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{1+b} \cdots \frac{n}{n-1+b} \\ &= \left(1 + \frac{1-b}{b}\right) \left(1 + \frac{1-b}{1+b}\right) \cdots \left(1 + \frac{1-b}{n-1+b}\right) \\ &\geq 1 + (1-b) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{1+b} + \cdots + \frac{1}{n-1+b}\right) \\ &> 1 + (1-b) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \infty \quad \text{dla } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gdzie pierwsza z nierówności wynika z (1.4), natomiast druga – z nierówności $k+b < k+1$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$. Badany szereg jest warunkowo zbieżny, gdyż $\lim_{x \rightarrow -1+} (1+x)^a = \infty$, a zatem Twierdzenie Abela wyklucza zbieżność szeregu

$$\left(\sum |\binom{a}{n}|\right)_{n \geq 0} = \left(\sum \binom{a}{n} (-1)^n\right)_{n \geq 0}. \quad \square$$

Wniosek 9.2.3 (Uogólniony szereg harmoniczny). *Zachodzi równość*

$$1 + \frac{1-a}{2!} + \frac{(1-a)(2-a)}{3!} + \frac{(1-a)(2-a)(3-a)}{4!} + \cdots = \frac{1}{a} \quad (9.11)$$

dla $a > 0$, przy czym powyższy szereg jest zbieżny bezwzględnie. \square

Oczywiście, dla $a \in \mathbb{N}$ szereg (9.11) jest skończoną sumą.

Przykład 9.2.1. Dla wykładnika $a = -\frac{1}{2}$ szereg dwumianowy przybiera szczególną postać wynikającą z tożsamości

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) \cdot (n-1+\frac{1}{2})}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{2^n n! (2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd rozwinięcie w szereg potęgowy

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \text{dla } x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]. \quad (9.12)$$

Wniosek 9.2.4. *Zachodzi równość*

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad (9.13)$$

dla $x \in [-1, 1]$, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \arcsin(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)2^{2k}} \right| \leq \binom{2n}{n} \frac{|x|^{2n+1}/(1-x^2)}{(2n+1)2^{2n}}, \quad (9.14)$$

jeśli $|x| < 1$. W szczególności, prawdziwy jest wzór

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad (9.15)$$

Dowód. Z Przykładów 8.2.4(i)–9.2.1 wiemy, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} \quad \text{dla } x \in (-1, 1).$$

Ponieważ równość (9.13) zachodzi dla $x = 0$, a obie funkcje mają tę samą pochodną, równość w przedziale $(-1, 1)$ wynika z Wniosku 8.3.8. Nierówność (9.14) wyprowadzamy z oszacowania

$$\left| \arcsin(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{|x|^{2k+1}}{2k+1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1} |x|^{2k+1} = \frac{a_n}{2n+1} \frac{|x|^{2n+1}}{1-|x|^2},$$

gdzie $a_k = |\binom{-\frac{1}{2}}{k}|$ dla $k \in \mathbb{N}$. Pozostaje rozszerzyć równość na przedział domknięty, a do tego wystarczy (bezwzględna) zbieżność szeregu (9.15).

Z oszacowania

$$\sum_{n=0}^m \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} < \arcsin(x) < \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in (0, 1) \text{ i } m \in \mathbb{N},$$

wynika ograniczoność, a więc także zbieżność ciągu

$$\sum_{n=0}^m \binom{2n}{n} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} = \sup \left\{ \sum_{n=0}^m \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}}; x \in (0, 1) \right\} \leq \frac{\pi}{2}$$

dla $m \in \mathbb{N}$. Równość (9.13) dla $|x| = 1$ wynika zatem z Twierdzenia Abela. \square

Ćwiczenie 9.2.1. Ocenic tempo zbieżności szeregu (9.15). Sprawdzić numerycznie, ile potrzeba składników, by błąd przybliżenia był mniejszy niż 10^{-3} .

9.3 Zastosowania do obliczeń numerycznych

Poznaliśmy już kilka ciągów, przeważnie w postaci szeregów, pozwalających na wyznaczanie (z pomocą komputera) liczb takich, jak e , π , czy też $\ln(2)$ lub $\sqrt{2}$. Obliczenia są efektywne, jeśli pozwalają uzyskać przybliżenie szukanej wielkości z „dowolną” zadaną dokładnością, co w praktyce oznacza możliwość wyznaczenia określonej liczby cyfr rozwinięcia dziesiętnego danej liczby – przeważnie w zakresie od 3 do 16-17.

W Przykładzie 5.1.4 staraliśmy się pokazać problemy związane z uzyskaniem oczekiwanej dokładności, co w zależności od postaci sumowanego szeregu oznaczało konieczność wyznaczenia sumy – od $n = 10^9$ poprzez $n = 500$, aż do zaledwie $n = 53$ składników. Wprawdzie suma szeregu czyli granica odpowiedniego ciągu była ta sama, jednak tempo zbieżności poszczególnych ciągów było inne. Na szczęście, analiza badanych ciągów pozwalała na ocenę błędu i uzależnienie od tego liczby wymaganych działań. Sygnalizujemy, że oczekiwanie, iż komputer *wyliczy granicę*, jeśli pozwoli mu się działać dostatecznie długo, jest błędne, a ocena błędu obliczeń i ustalenie momentu, w którym można je zakończyć (przerwać) jest ważnym aspektem *Analizy Numerycznej*. Szersze ujęcie tego tematu wykracza poza ramy bieżącego kursu.

Przykład 9.3.1 (... a właściwie kontrprzykład). Zakładamy, że czytelnik zdążył się przekonać o dziwnie wolnej zbieżności szeregu (9.15), gdzie suma częściowa szeregu daje błąd przybliżenia liczby $\frac{\pi}{2}$ mniejszy niż 0,001 dopiero dla $n = 318310$ składników. Specyficzne zachowanie szeregu wyjaśnia udowodnione niżej Stwierdzenie 9.3.1. Podane w nim nierówności oznaczają, że w szeregu (9.15) reszta, czyli suma $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$, jest zawsze przynajmniej $2n$ razy większa niż n -ty wyraz. W szczególności – reszta po dodaniu 10^6 (milionu) składników jest jeszcze $2 \cdot 10^6$ razy większa, niż ostatni dodany

składnik. Jeśli komuś wydaje się, że taki szereg nie może być zbieżny, wyjaśniamy – może, skoro jest.

Stwierdzenie 9.3.1. *Przyjmijmy oznaczenie $a_0 = 1$ i*

$$a_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego n zachodzą nierówności

$$2n \cdot \frac{a_n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2k+1} < a_n = (2n+1) \cdot \frac{a_n}{2n+1}. \quad (9.16)$$

Ćwiczenie 9.3.1. Wynikająca z oszacowania (9.16) korekta

$$\frac{\pi}{2} \approx \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2k+1} + (2n+1) \cdot \frac{a_n}{2n+1}$$

redukuje błąd przybliżenia do co najwyżej $\frac{1}{2} n$ -tego wyrazu. Sprawdzić, że poprawiony ciąg daje błąd mniejszy niż 0,001 dla $n \geq 27$, natomiast dopiero (już?) dla $n \geq 270963$ błąd przybliżenia jest mniejszy niż 10^{-9} .

Dowód Stwierdzenia 9.3.1. Dla $n \geq 0$ przekształcamy szereg do postaci

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k - \frac{2k}{2k+1} a_k \right) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - c_{k+1}), \quad (9.17)$$

gdzie oznaczyliśmy $c_{k+1} = \frac{2k}{2k+1} a_k$, a więc $c_k = \frac{4(k-1)k}{(2k-1)^2} a_k$ dla $k \geq 1$. Z Twierdzenia 9.2.2(iii) dla wykładnika $a = -\frac{1}{2}$ (por. Przykład 9.2.1) wiemy, że szereg $(\sum a_n)_{n \geq 0}$ jest rozbieżny, mimo iż wyrazy a_n maleją do 0 dla $n \rightarrow \infty$. Chcąc przedstawić szereg (9.17) jako sumę szeregu naprzemiennego, powinniśmy wykazać (relatywną) zbieżność szeregu

$$a_0 - c_1 + a_1 - c_2 + a_2 - c_3 + \dots = \left(\sum (-1)^k A_k \right)_{k \geq 0},$$

gdzie $A_{2k} = a_k$, $A_{2k+1} = c_{k+1}$ dla $k \geq 0$. W tym celu zastępujemy badany szereg przez

$$(a_0 + a_1) - c_1 + a_2 - c_2 + a_3 - c_3 + \dots = \left(\sum (-1)^k B_k \right)_{k \geq 0}.$$

Lemat 9.3.2. (i) Szereg $(\sum (-1)^k B_k)_{k \geq 0}$ o wyrazach $B_0 = a_0 + a_1$ oraz $B_{2k-1} = c_k$ i $B_{2k} = a_{k+1}$, dla $k \geq 1$ spełnia kryterium Leibniza – począwszy od wyrazu B_2 .

(ii) Szereg $(\sum (-1)^k A_k)_{k \geq 0}$ jest zbieżny, przy czym zachodzą równości

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k.$$

Dowód. (i) Bezpośrednie porównanie parzystych i nieparzystych wyrazów badanych ciągów prowadzi do nierówności $a_k - c_k = \frac{a_k}{(2k-1)^2} > 0$ dla $k \geq 1$ oraz

$$c_k - a_{k+1} = a_k \left(\frac{4(k-1)k}{(2k-1)^2} - \frac{2k+1}{2(k+1)} \right) = a_k \frac{4k^2 - 6k - 1}{2(k+1)(2k+1)^2} > 0$$

dla $k \geq 2$. Zbieżność $B_k \rightarrow 0$ wynika ze zbieżności $a_k \rightarrow 0$ dla $k \rightarrow \infty$.

(ii) Tożsamości $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k A_k = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k B_k$ dla $m \in \mathbb{N}$ pozwalają rozciągnąć uzyskaną wyżej zbieżność na pierwszy z szeregów i implikują równość sum. Zgodność z szeregiem (9.17) wynika z twierdzenia o łączności (Stwierdzenie 5.1.4). \square

Dowód Stwierdzenia 9.3.1 (cd): Udowodniona zbieżność szeregu naprzemiennego pozwala na zapisanie reszty (9.17) w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} &= \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k A_k = a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-c_k + a_k) \\ &= a_n + \left(\frac{a_{n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{a_{n+2}}{(2n+3)^2} + \frac{a_{n+3}}{(2n+5)^2} + \dots \right) \\ &= a_n \left(1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)(2n+5)(2n+6)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Szukając oszacowania z góry, otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} a_n &< \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} < a_n \left(1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{1}{(2n+5)(2n+6)} + \dots \right) \\ &= a_n \left(1 + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+6} + \dots \right) < a_n \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

co, po odjęciu składnika $\frac{a_n}{2n+1}$, kończy dowód nierówności (9.16). \square

W trakcie dowodu otrzymaliśmy także (dla $n = 0$)

Wniosek 9.3.3. *Zachodzi równość $\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(2k-1)^2}$.* \square

Specyficzne, niesprzyjające obliczeniom własności szeregów opisujących liczbę $\frac{\pi}{2} = \arcsin(1)$ raczej wykluczają ich praktyczne zastosowanie. Dla odmiany, *wewnątrz* swego przedziału zbieżności szeregi potęgowe z reguły mają dobre własności numeryczne.

Przykład 9.3.2. Pochodzący z rozwinięcia tej samej funkcji szereg

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} \cdot 2^{-(2k+1)}$$

prowadzi do wzoru

$$\pi = 3 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right), \quad (9.18)$$

przy czym nierówność (9.14) daje oszacowanie

$$0 < \pi - 3 \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2k+1} \cdot 2^{-2k} < \frac{a_n}{2n+1} \cdot 2^{-2n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Błąd otrzymanego w ten sposób przybliżenia liczby π jest mniejszy niż 10^{-9} dla $n \geq 12$ składników.

Jeszcze większa efektywność cechuje szereg (8.11) będący rozwinięciem funkcji \arctg . Zamiast wyznaczania liczby $\frac{\pi}{4} = \arctg(1)$ co, jak wiemy, nie jest zbyt efektywne, można skorzystać z tożsamości Machina (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctg\left(\frac{1}{5}\right) - \arctg\left(\frac{1}{239}\right). \quad (9.19)$$

Ćwiczenie 9.3.2. Dla $a = \arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, korzystając ze wzoru

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)},$$

sprawdzić, że $\operatorname{tg}(4a) = \frac{120}{119}$, a następnie wyznaczyć $\operatorname{tg}\left(4a - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ćwiczenie 9.3.3. Korzystając z nierówności (8.12) oszacować dokładność przybliżenia

$$\frac{\pi}{4} \approx 4 \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)5^{2k-1}} - \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)239^{2k-1}}$$

Ile składników należy uwzględnić, by uzyskać przybliżoną wartość liczby π z błędem mniejszym niż 10^{-12} ?

Przykład 9.3.3. Aby z pomocą rozwinięcia w szereg funkcji trygonometrycznych wyznaczyć przybliżenia liczby $\sin(1)$, korzystamy z Lematu 6.7.2, co daje

$$\left| \sin(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$$

lub, po wyznaczeniu liczby $\tau = \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\left| \sin(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \tau^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} < \frac{1}{(2n)! 3^n}.$$

Wyznaczanie liczby

$$\sin(2) = \begin{cases} \sin(\pi - 2) = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - 1) \sin(\frac{\pi}{2} - 1) \\ \cos(2 - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(1 - \frac{\pi}{4})^2 - 1 \end{cases}$$

pozwała na dość dużą swobodę wyboru metody pod warunkiem, że znamy już dostatecznie dokładnie wyznaczoną liczbę π . O szybkości działania (zbieżności) wybranej metody decydują wielkości

$$\begin{aligned} \pi - 2 &= 1,1415..., & \frac{\pi}{2} - 1 &= 0,5708... < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2 - \frac{\pi}{2} &= 0,4292... < \frac{1}{\sqrt{5}}, & 1 - \frac{\pi}{4} &= 0,2146... < \frac{1}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Przykład 9.3.4. Tożsamość

$$\left(\frac{25}{24}\right)^2 \left(\frac{16}{15}\right)^4 \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{5^4 \cdot 2^{16} \cdot 3^6}{(2^6 \cdot 3^2)(3^4 \cdot 5^4)2^9} = 2$$

pozwała wykorzystać wzory

$$\begin{aligned} \ln(2) &= 2 \ln\left(1 + \frac{1}{24}\right) + 4 \ln\left(1 + \frac{1}{15}\right) + 3 \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) \\ &= -2 \ln\left(1 - \frac{1}{25}\right) - 4 \ln\left(1 - \frac{1}{16}\right) - 3 \ln\left(1 - \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

dla wyznaczenia liczby $\ln(2)$ z dokładnością np. do 12 cyfr po przecinku. Który wzór potrzebuje mniej składników, a daje lepszą dokładność przy tej samej ich liczbie?

Ćwiczenie 9.3.4. Korzystając z tożsamości $\left(\frac{25}{24}\right)^3 \left(\frac{16}{15}\right)^6 \left(\frac{9}{8}\right)^9 = 3$, wyznaczyć $\ln(3)$. Znaleźć analogiczny rozkład na czynniki liczby 5 i wyznaczyć $\ln(5)$ z błędem mniejszym niż 10^{-9} .

Przykład 9.3.5. Liczba $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(2)}$ nie wygląda na szczególnie interesującą, a do wyznaczenia jej przybliżonej wartości możemy skorzystać z szeregu (5.11). Aby ocenić wykładnik $a = \sqrt{2}\ln(2)$, od którego zależy tempo zbieżności szeregu, i którego *dobrze* przybliżenie jest podstawą do dalszych obliczeń, zauważmy, że oszacowane (8.8) dla $n = 4$ prowadzi do nierówności (sprawdzić!)

$$\ln(2) < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) + \frac{1}{32} < \frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{7}{10} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

z której wynika ograniczenie $\sqrt{2}\ln(2) < 1$. Nierówność ta, wykazana bez pomocy komputera, nie jest całkiem banalna, skoro faktyczna wartość wykładnika wynosi $a = 0,980258143468547...$ Zgodnie z oszacowaniem (9.5), zachodzą nierówności

$$\left|e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}\right| < \frac{1}{n \cdot n!} \quad \text{ i } \quad \left|e^{\frac{a}{4}} - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k! \cdot 4^k}\right| < \frac{1}{n \cdot n! \cdot 4^{n+1}},$$

co daje błąd mniejszy niż 10^{-9} odpowiednio dla $n \geq 12$ i $n \geq 7$. Oczywiście, znając $e^{\frac{a}{4}}$ wyliczamy $2^{\sqrt{2}} = e^a = ((e^{\frac{a}{4}})^2)^2$ – w dwu kolejnych operacjach.

9.4 Przybliżone wyznaczanie pochodnych

Zastanówmy się nad możliwością wykorzystania definicji pochodnej i wzoru

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

do efektywnego przybliżania wartości pochodnej funkcji $f: J \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 9.4.1. Dla funkcji $f(x) = \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, przy pomocy komputera możemy wyznaczyć wartości ilorazu różnicowego w $t = 0$,

$$f_0(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) + f''(\alpha h) \frac{h}{2}, \quad \text{gdzie } \alpha \in (0, 1), \quad (9.20)$$

wybierając dla $h \rightarrow 0^+$ wartości 10^{-k} , $k = 1, 2, \dots, 12$. Przy standardowym sposobie zapisu liczb w pamięci komputera z dokładnością do ok. 16–17 cyfr znaczących (dokładnych), daje to wartości h i odpowiednio $f_0(h) \approx f'(0)$ równe

10^{-1} : 0, <u>5</u> 206995848425233...	10^{-7} : 0, <u>5403022</u> 906858012...
10^{-2} : 0, <u>53</u> 87540646056066...	10^{-8} : 0, <u>54030230</u> 28982544...
10^{-3} : 0, <u>540</u> 1513004701375...	10^{-9} : 0, <u>5403023</u> 584094057...
10^{-4} : 0, <u>5402</u> 872432269668...	10^{-10} : 0, <u>54030224</u> 73871032...
10^{-5} : 0, <u>540300</u> 7999782439...	10^{-11} : 0, <u>5403011</u> 371640786...
10^{-6} : 0, <u>5403021</u> 552385922...	10^{-12} : 0, <u>540345</u> 5460850636...,

przy czym faktyczną wartością pochodnej jest

$$f'(0) = \cos(1) = 0,540302305868...$$

Zgodnie ze wzorem Taylora (9.20) uzyskana dokładność jest *liniowa*, tzn. 10-krotne zmniejszenie wartości *kroku* h daje kolejną 1 cyfrę dokładną uzyskanego przybliżenia, co ilustruje podkreślenie w tekście cyfr znaczących. Reguła ta załamuje się jednak począwszy od $h = 10^{-9}$, a przyczyną jest stopniowy wzrost wbudowanego w komputerowy system obliczeń *błędu zaokrągleń*. Losowy błąd ograniczony przez 10^{-16} i pojawiający się w liczniku $f(h) - f(0)$ we wzorze (9.20), po podzieleniu przez $h = 10^{-9}$ wzrasta do poziomu 10^{-7} i zmniejsza faktyczną dokładność przybliżenia. Podobnie

zachowuje się ciąg przybliżeń *lewostronnych* – dla $h < 0$. Praktyczne metody zwiększania dokładności, sygnalizowane wcześniej w tekście, sugerują jako potencjalnie lepszą metodę obliczeń, która korzysta ze średniej

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \right) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}.$$

Potwierdzają to uzyskane wyniki

$$\begin{array}{ll} 10^{-1}: 0,5360811163376211... & 10^{-5}: 0,5403023058236922... \\ 10^{-2}: 0,5402602309327320... & 10^{-6}: 0,5403023058403454... \\ 10^{-3}: 0,5403018851325436... & 10^{-7}: 0,5403023056738120... \\ 10^{-4}: 0,5403023016609110... & 10^{-8}: 0,5403023028982544... \end{array}$$

Twierdzenie 9.4.1. Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Dla dowolnego punktu wewnętrznego $t \in J^\circ$ i $h > 0$,

(i) jeśli w otoczeniu $(t-h, t+h) \subset J$ istnieje pochodna f''' , to

$$\left| f'(t) - \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \right| \leq CM_3 h^2, \quad (9.21)$$

gdzie $M_3 = \sup\{|f'''(x)|; x \in (t-h, t+h)\}$ i $C = \frac{1}{6}$;

(ii) jeśli w otoczeniu $(t-2h, t+2h) \subset J$ istnieje pochodna $f^{(5)}$, to

$$\left| f'(t) - \frac{-f(t+2h) + 8f(t+h) - 8f(t-h) + f(t-2h)}{12h} \right| \leq CM_5 h^4, \quad (9.22)$$

gdzie $M_5 = \sup\{|f^{(5)}(x)|; x \in (t-2h, t+2h)\}$ i stała C nie zależy od f i h .

Zastosowanie przybliżenia (9.22) do funkcji $f(x) = \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, daje

$$\begin{array}{ll} 10^{-1}: 0,5403571965915938... & 10^{-3}: 0,5403023058687303... \\ 10^{-2}: 0,5403023114123624... & 10^{-4}: 0,5403023058683787... \end{array}$$

Dowód Twierdzenia 9.4.1. Wykażemy nierówność (9.22), pozostawiając czytelnikowi do sprawdzenia prostszą wersję (9.21). Ze wzoru Taylora z resztą Lagrange'a (9.4) w przedziale $(t-2h, t+2h) \subset J$ wynikają równości

$$\begin{aligned} f(t+2h) &= f(t) + 2f'(t)h + 2f''(t)h^2 + \frac{4f'''(t)}{3}h^3 + \frac{2f^{(4)}(t)}{3}h^4 + \frac{4f^{(5)}(t+c_1)}{15}h^5 \\ f(t+h) &= f(t) + f'(t)h + \frac{f''(t)}{2}h^2 + \frac{f'''(t)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{24}h^4 + \frac{f^{(5)}(t+c_2)}{120}h^5 \\ f(t-h) &= f(t) - f'(t)h + \frac{f''(t)}{2}h^2 - \frac{f'''(t)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{24}h^4 - \frac{f^{(5)}(t-c_3)}{120}h^5 \\ f(t-2h) &= f(t) - 2f'(t)h + 2f''(t)h^2 - \frac{4f'''(t)}{3}h^3 + \frac{2f^{(4)}(t)}{3}h^4 - \frac{4f^{(5)}(t-c_4)}{15}h^5, \end{aligned} \quad (9.23)$$

gdzie $c_1, \dots, c_4 \in (0, 2h)$. Aby wyrażenie $af(t+2h) + bf(t+h) + cf(t) + df(t-h) + ef(t-2h)$ przybliżało wartość $f'(t)h$, szukamy współczynników $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ będących rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 2a + b - d - 2e = 1 \\ 2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d + 2e = 0 \\ \frac{4}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{6}d - \frac{4}{3}e = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{24}b + \frac{1}{24}d + \frac{2}{3}e = 0. \end{cases}$$

Znalezione współczynniki prowadzą do tożsamości

$$\begin{aligned} \frac{-1}{12}f(t+2h) + \frac{2}{3}f(t+h) - \frac{2}{3}f(t-h) + \frac{1}{12}f(t-2h) &= f'(t)h \\ &+ (-4f^{(5)}(t+c_1) + f^{(5)}(t+c_2) - f^{(5)}(t-c_3) + 4f^{(5)}(t-c_4)) \frac{h^5}{180}, \end{aligned}$$

z której już bezpośrednio wynika (9.22). \square

W analogiczny sposób możemy wyznaczać przybliżone wartości drugiej i dalszych pochodnych.

Twierdzenie 9.4.2. *Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Dla dowolnego punktu wewnętrznego $t \in J^\circ$ i $h > 0$,*

(i) *jeśli w otoczeniu $(t-h, t+h) \subset J$ istnieje pochodna $f^{(4)}$, to*

$$\left| f''(t) - \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2} \right| \leq CM_4 h^2, \quad (9.24)$$

gdzie $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(x)|; x \in (t-h, t+h)\}$ i $C > 0$ nie zależy od f i h ;

(ii) *jeśli w otoczeniu $(t-2h, t+2h) \subset J$ istnieje pochodna $f^{(6)}$, to*

$$\left| f''(t) - \frac{-f(t+2h) + 16f(t+h) - 30f(t) + 16f(t-h) - f(t-2h)}{12h^2} \right| \leq CM_6 h^4, \quad (9.25)$$

gdzie $M_6 = \sup\{|f^{(6)}(x)|; x \in (t-2h, t+2h)\}$ i stała C nie zależy od f i h .

Dowód. Proste ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 9.4.1. Sprawdzić możliwość praktycznego zastosowania wzorów (9.24)–(9.25) dla wyznaczania przybliżonych wartości drugiej pochodnej danej funkcji.

Ćwiczenie 9.4.2. Wyznaczyć współczynniki i oszacować błąd przybliżeń pochodnej $f'(t)$ korzystając z wartości jednostronnych $f(t), f(t+h), f(t+2h)$ i $f(t+3h)$.

9.5 Metody Picarda i Newtona

Bieżący podrozdział wprowadza dwie metody przybliżonego rozwiązywania równań postaci $f(x) = x$ lub $g(x) = 0$, gdzie f i g są danymi funkcjami ciągłymi. Wprawdzie równania wyglądają na równoważne i bez trudu można je zapisać w postaci $f(x) - x = 0$ lub $x - cg(x) = x$, gdzie $c \neq 0$, jednak ze względu na zastosowania i założenia dotyczące funkcji będziemy je traktować jako dwa odrębne problemy.

Definicja 9.5.1. Liczbę t należącą do dziedziny $J \subset \mathbb{R}$ funkcji rzeczywistej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy punktem stałym funkcji f , jeśli

$$f(t) = t.$$

Podstawowe twierdzenie o istnieniu punktów stałych należy do obszaru *Analizy*, ale nie ma nic wspólnego z rachunkiem różniczkowym.

Lemat 9.5.1. Funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ określona na przedziale domkniętym i ograniczonym ma punkt stały, jeśli $f(a), f(b) \in [a, b]$.

Dowód. Z założenia o funkcji f wynikają nierówności $f(a) \geq a$ i $f(b) \leq b$, a zatem funkcja ciągła $F(x) = f(x) - x$ dla $x \in [a, b]$ spełnia nierówności $F(a) \geq 0 \geq F(b)$. Z własności Darboux wynika istnienie punktu $t \in [a, b]$ takiego, że $F(t) = 0$. \square

Wniosek 9.5.2 (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym). Każda funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ ma punkt stały. \square

Uwaga 9.5.1. Wprawdzie założenie sformułowane w Twierdzeniu Brouwera wydaje się istotnie mocniejsze niż podane w Lemacie 9.5.1, jednak oba twierdzenia są równoważne. Jeśli funkcja ciągła spełnia warunek $f(a), f(b) \in [a, b]$, to dla kresów $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ i $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ przyjmijmy $A := \min\{a, m\}$ i $B := \max\{b, M\}$. Istnieje wówczas ciągłe rozszerzenie f do funkcji $F: [A, B] \rightarrow [A, B]$ takiej, że

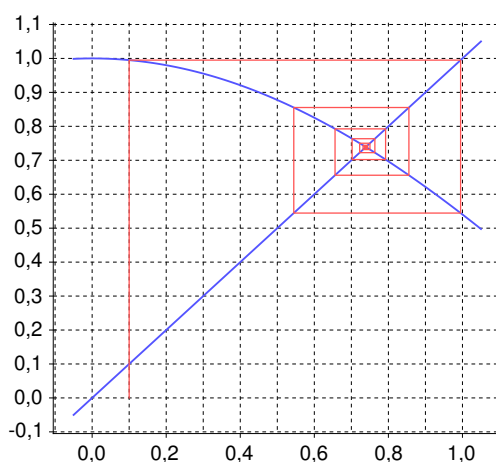
$$F(x) = \begin{cases} f(a), & \text{jeśli } x \leq a, \\ f(x) & \text{dla } x \in [a, b], \\ f(b), & \text{jeśli } b \leq x, \end{cases}$$

przy czym $F(x) = x \iff f(x) = x$.

Uwaga 9.5.2. W odróżnieniu od raczej trywialnego wniosku podanego wyżej, pełna wersja twierdzenia Brouwera dotyczy istnienia punktów stałych

odwzorowań (funkcji) domkniętego koła lub kuli, czy też domkniętej kostki *w siebie* i rozciąga się także na dowolny wyższy wymiar. Ogólne twierdzenie Brouwera jest uważane za trudne i nie mieści się w ramach elementarnego kursu *Analizy*.

Dla znalezienia punktu stałego funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ możemy oczywiście wykorzystać metodę połowienia – i szukać przybliżonego rozwiązania równania $f(x) - x = 0$. Założenie $f[a, b] \subset [a, b]$ pozwala na wybór innej drogi i przybliżanie punktu stałego *metodą iteracji*.



Rysunek 9.1: Metoda Picarda wyznaczania punktu stałego

Definicja 9.5.2. Ciąg $(x_n)_{n \geq 0}$ nazywamy iterowanym lub ciągiem Picarda dla funkcji $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, jeśli

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Liczbę $x_0 \in [a, b]$ uznajemy za punkt startowy lub początkowy ciągu. Dla $n \in \mathbb{N}$ liczba $x_n = f(\cdots f(x_0) \cdots)$ jest n -tą iteracją punktu startowego.

Przykład 9.5.1. Punkt stały funkcji $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, musi leżeć w przedziale $[-1, 1] = \cos[\mathbb{R}]$, a nawet w przedziale $[0, 1]$, skoro $\cos|_{[-1,1]} > 0$. Wychodząc od punktu startowego $x_0 = 0,1$ otrzymujemy ciąg iterowany

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0,9950... & x_4 = 0,6559... & x_7 = 0,7635... \\ x_2 = 0,5445... & x_5 = 0,7925... & x_8 = 0,7224... \\ x_3 = 0,8554... & x_6 = 0,7021... & x_9 = 0,7502..., \end{array}$$

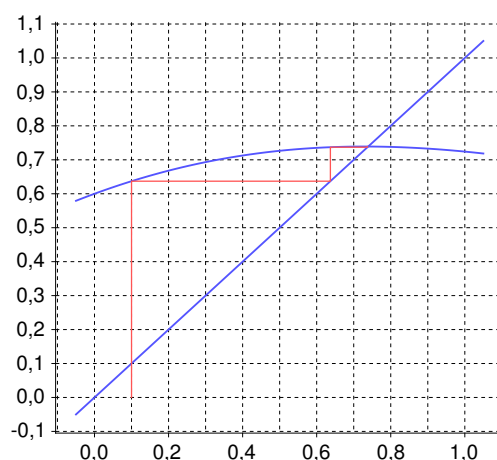
którego zbieżność nie jest bynajmniej oczywista, a którego oscylacyjny charakter ilustruje rys. 9.1. Ten sam problem zapisany w postaci

$$x = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\cos(x) \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

prowadzi do ciągu iteracji (rys. 9.2)

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0,637... & x_4 = 0,739085102... & x_7 = 0,7390851332151629... \\ x_2 = 0,7371... & x_5 = 0,73908513334... & x_8 = 0,7390851332151607... \\ x_3 = 0,739092... & x_6 = 0,7390851332146... & x_9 = 0,7390851332151607..., \end{array}$$

w którym uzyskany błąd jest mniejszy niż 10^{-16} .



Rysunek 9.2: Metoda Picarda – efekt modyfikacji funkcji

Podstawy działania metody iteracji Picarda zawiera

Stwierdzenie 9.5.3. *Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, jeśli ciąg iterowany $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, to granica $t = \lim_n x_n \in [a, b]$ jest punktem stałym.*

Jeśli ciąg iterowany jest zbieżny, a nie jest stały (powyżej pewnego indeksu) i istnieje pochodna $f'(t)$, to zachodzi nierówność $-1 \leq f'(t) \leq 1$.

Dowód. Jeśli $t = \lim_n x_n$, to z ciągłości funkcji wynikają równości

$$f(t) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = t.$$

Istnienie pochodnej $f'(t)$ pociąga za sobą zbieżność $\frac{f(t) - f(x_n)}{t - x_n} \rightarrow f'(t)$, a więc

$$\lim_n \frac{|t - x_{n+1}|}{|t - x_n|} = |f'(t)|,$$

o ile $t \neq x_n$ dla wszystkich n . Przypuszczenie, że $|f'(t)| \geq c > 1$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, oznacza zatem istnienie indeksu $m \in \mathbb{N}$ takiego, że $|t - x_{n+1}| > c|t - x_n|$ dla $n \geq m$. Wynikające stąd nierówności

$$|t - x_{m+n}| > c|t - x_{m+n-1}| > \dots > c^n|t - x_m| \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

wykluczają zbieżność $x_n \rightarrow t$. \square

Warunek dostateczny istnienia i jednoznaczności punktu stałego wprowadza

Definicja 9.5.3. Funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy zwężającą, jeśli

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad (9.26)$$

dla dowolnych różnych liczb $x, y \in [a, b]$.

Każda funkcja zwężająca jest oczywiście ciągła.

Stwierdzenie 9.5.4. (i) Funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a, b) i taka, że $|f'(x)| < 1$ dla $x \in (a, b)$, jest funkcją zwężającą.

(ii) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją zwężającą, jeśli istnieje podział dziedziny funkcji, czyli skończony ciąg $a = p_0 < p_1 < \dots < p_m = b$ taki, że każde z obcięć $f|_{[p_{k-1}, p_k]}$, $k \leq m$, jest funkcją zwężającą.

Dowód. Własność (i) wynika z Twierdzenia Lagrange'a, skoro z (8.13) wynika

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$$

dla $x \neq y$ i pewnego punktu $c \in (a, b)$ leżącego między x i y . Dla dowodu własności (ii) założmy najpierw, że $p \in (a, b)$ jest punktem, dla którego obcięcia $f|_{[a, p]}$ i $f|_{[p, b]}$ są funkcjami zwężającymi. Aby wykazać analogiczną własność funkcji f wystarczy sprawdzić nierówność (9.26) dla dowolnej pary $x \in [a, p]$ i $y \in (p, b]$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < |x - p| + |p - y| \\ &= (p - x) + (y - p) = y - x = |x - y|. \end{aligned}$$

Przedstawione tu rozumowanie pozwala przeprowadzić dowód indukcyjny – względem liczby m odcinków, na których funkcja f jest zwężająca. \square

Opisaną wyżej metodę iteracji precyzuje – jako *algorytm Picarda*

Twierdzenie 9.5.5 (Picarda o zbieżności). Każda funkcja zwężająca o dziedzinie $[a, b]$ ma dokładnie jeden punkt stały $t \in [a, b]$. Dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in [a, b]$ ciąg iterowany $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do t .

Dowód. Niech $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ będzie funkcją zwężającą. Jeśli $t, t^* \in [a, b]$ są punktami stałymi, to przypuszczenie, że $t \neq t^*$, prowadzi do sprzeczności $|t - t^*| = |f(t) - f(t^*)| < |t - t^*|$. Zatem t jest jedynym punktem stałym funkcji f .

Ustalmy dowolny punkt startowy $x_0 \in [a, b]$. Ciąg iterowany $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla f i x_0 jest zawarty w przedziale $[a, b]$, a więc ograniczony, natomiast nierówności

$$|x_n - t| = |f(x_{n-1}) - f(t)| \leq |x_{n-1} - t| \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

oznaczają, że ciąg odległości $(|x_n - t|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący. Aby udowodnić zbieżność $x_n \rightarrow t$ wystarczy wykazać, zgodnie z Wnioskiem 4.3.4, że każdy zbieżny podciąg $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do t . Załóżmy zatem, że istnieje granica $\lim_n x_{k_n} = t^*$. Z monotoniczności ciągu odległości wynikają nierówności

$$|x_{k_{n+1}} - t| \leq |x_{k_n+1} - t| \leq |x_{k_n} - t|,$$

a zatem Twierdzenie 3.4.3 (o trzech ciągach) prowadzi do równości

$$|t^* - t| = \lim_n |x_{k_{n+1}} - t| = \lim_n |f(x_{k_n}) - f(t)| = |f(t^*) - f(t)|.$$

Stąd $t^* = t$ i ostatecznie $\lim_n x_n = t$. \square

Wiemy już, że o praktycznych możliwościach wykorzystania ciągów zbieżnych do przybliżonego wyznaczania granicy decyduje możliwość efektywnego oszacowania błędu, czyli różnicy między przybliżoną wielkością a kolejnymi wyrazami ciągu. Stąd znaczenie kolejnego wyniku.

Twierdzenie 9.5.6 (Banacha o punkcie stałym). *Niech $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ będzie funkcją zwężającą spełniającą warunek*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{dla pewnego } L < 1 \quad (9.27)$$

i dowolnych $x, y \in [a, b]$. Wówczas dla każdego punktu startowego $x_0 \in [a, b]$ i odpowiadającego mu ciągu iterowanego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi oszacowanie

$$|x_n - t| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_0 - f(x_0)|, \quad (9.28)$$

gdzie t jest punktem stałym funkcji f .

Funkcja ciągła f spełnia warunek Lipschitza (9.27), jeśli jest różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b) i kres górny $L := \sup\{|f'(x)|; x \in (a, b)\}$ jest mniejszy niż 1.

Dowód. Warunek Lipschitza (9.27) prowadzi to do oszacowania

$$|x_n - t| \leq L^n |x_0 - t| \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności, dla $n = 1$, nierówności

$$|x_0 - t| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - t| \leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - t|$$

pozwalają zastąpić nieznaną wielkość $|x_0 - t|$ przez jej ograniczenie z góry równe $\frac{1}{1-L}|x_0 - x_1|$, co kończy dowód. \square

Uwaga 9.5.3. Wzór (9.28) tłumaczy relatywnie wolną zbieżność w pierwszej części Przykładu 9.5.1 – wolniejszą, niż wynikająca z metody połowienia, gdzie w każdym kroku błąd zmniejsza się dwukrotnie, a to odpowiada stałej $L = \frac{1}{2}$. Najlepszą dokładność i najszybszą zbieżność daje metoda Picarda w przypadku, gdy stała L jest bliska 0, co można było zaobserwować w drugiej części przykładu.

Dla równania postaci $g(x) = 0$, gdzie $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą określoną na przedziale $J \subset \mathbb{R}$, wspomniana wcześniej równoważność problemów umożliwia poszukiwanie rozwiązania, czyli miejsca zerowego $t \in J$ funkcji g , jako punktu stałego dowolnej funkcji postaci $f(x) \equiv x - cg(x)$, gdzie $c \neq 0$. Pozostawiamy przy tym otwarty problem odpowiedniego doboru dziedziny funkcji f .

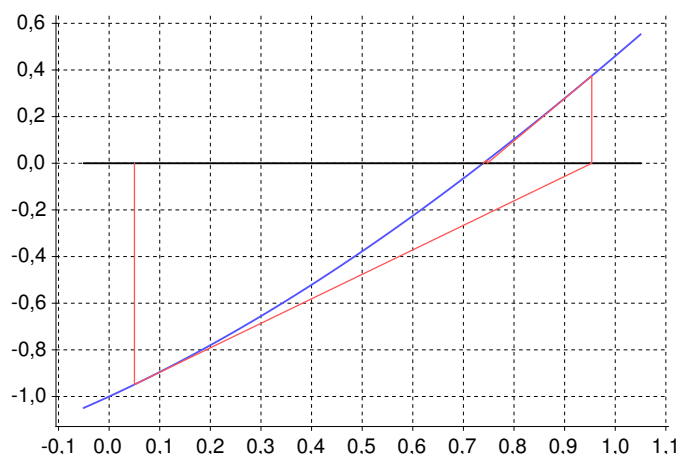
Załóżmy, że funkcja g ma w otoczeniu punktu t ciągłą pochodną, przy czym $g'(t) \neq 0$. Z równości $f'(x) = 1 - cg'(x)$, wynika, że wybór parametru $c = \frac{1}{g'(t)}$ pozwala na dowolnie małe ograniczenie wielkości $|f'(x)|$, o ile x przebiega dostatecznie małe otoczenie $(t - \delta, t + \delta)$ szukanej wielkości t . Ponieważ nie znamy wartości pochodnej w szukanym punkcie t , skutecznym rozwiązaniem jest wykorzystanie dostępnych przybliżeń.

Definicja 9.5.4 (Metoda stycznych, Newtona). *Niech $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że*

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{ i } \quad x - \frac{g(x)}{g'(x)} \in [a, b] \quad \text{ dla } x \in [a, b].$$

Ciągiem Newtona dla funkcji g z punktem startowym $x_0 \in [a, b]$ nazywamy ciąg iterowany $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający zależność

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})} \quad \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \quad (9.29)$$



Rysunek 9.3: Metoda stycznych Newtona

Przykład 9.5.2. Równość (9.29) oznacza, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba x_n oznacza punkt przecięcia osi X i stycznej do wykresu funkcji g w punkcie x_{n-1} . Ciąg Newtona dla funkcji $g(x) = x - \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, z punktem startowym $x_0 = 0,05$ (rys. 9.3) tworzą liczby

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,953589... & x_4 = 0,739085133259... \\ x_2 = 0,747128... & x_5 = 0,7390851332151607... \\ x_3 = 0,739099... & x_6 = 0,7390851332151607.... \end{array}$$

Metoda Newtona jest szczególnym przypadkiem metody Picarda, a zatem stosują się do niej twierdzenia o funkcjach zwężających. Ważny i prosty warunek dostateczny zbieżności wynika także z geometrycznych własności funkcji wypukłych. Przy ustalonych w ten sposób założeniach otrzymujemy *algorytm Newtona*.

Twierdzenie 9.5.7 (O zbieżności metody Newtona). *Niech $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i taką, że $g(a) \cdot g(b) < 0$ oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in [a, b]$. Jeśli funkcja g jest wypukła, to dla każdego punktu startowego $x_0 \in [a, b]$ takiego, że $g(x_0) > 0$, wyznaczony przez funkcję g ciąg Newtona jest poprawnie zdefiniowany i monotonicznie zbieżny do jedyne miejsca zerowego t funkcji g .*

Jeżeli druga pochodna g'' istnieje i jest funkcją ograniczoną w przedziale $\{x; g(x) > 0\}$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|t - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2|g'(x_n)|} |t - x_n|^2 \leq \frac{M}{2m} |t - x_n|^2 \quad (9.30)$$

gdzie $M = \sup\{|g''(x)|; g(x) > 0\}$ i $m = \inf\{|g'(x)|; g(x) > 0\}$.

W szczególności, za punkt startowy ciągu przybliżeń może być wybrany jeden z końców przedziału $[a, b]$.

Dowód. Z założenia i Twierdzenia 8.4.7(iii) wynika, że pochodna g' jest nie-
malejąca i ciągła, a więc ma stały znak. Dla ustalenia uwagi ograniczymy się
do przypadku $g' > 0$, co oznacza także, że g jest funkcją ściśle rosnącą. Wy-
nikają stąd nierówności $g(a) < 0 < g(b)$, a badana funkcja ma w przedziale
 (a, b) dokładnie jedno miejsce zerowe t , przy czym $g(x) > 0 \iff t < x$ dla
 $x \in [a, b]$. Wychodząc od dowolnego punktu startowego $x_0 \in (t, b]$ i korzy-
stając z indukcji, definiujemy ciąg iterowany $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $t \leq x_n \leq x_{n-1}$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, mając zdefiniowany punkt $x_{n-1} \in [t, b]$ dla
pewnego $n \in \mathbb{N}$, z założenia o znaku pochodnej g' wnioskujemy nierówność

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})} \leq x_{n-1}. \quad (9.31)$$

Z drugiej strony, z wypukłości funkcji g i Stwierdzenia 8.4.6 dla stycznej
w punkcie x_{n-1} wynika nierówność

$$g(x) \geq g(x_{n-1}) + (x - x_{n-1})g'(x_{n-1}), \quad \text{jeśli } x \in [a, b],$$

a więc $g(x_n) \geq 0$, co zapewnia poprawność konstrukcji $x_n \in [t, b]$ dla wszyst-
kich $n \in \mathbb{N}$. Ciąg nierosnący $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograniczony jest zbieżny, a jego granica
 x^* spełnia równość $g(x^*) = 0$, a więc $x^* = t$. Pozostawiamy czytelniko-
wi modyfikację dowodu dla przypadku funkcji wypukłej g ściśle malejącej
(i $g' < 0$), gdy skonstruowany ciąg iteracji jest niemalejący.

Jeśli istnieje druga pochodna g'' , to ze wzoru Taylora wynika równość

$$0 = g(t) = g(x_n) + g'(x_n)(t - x_n) + g''(c) \frac{(t - x_n)^2}{2},$$

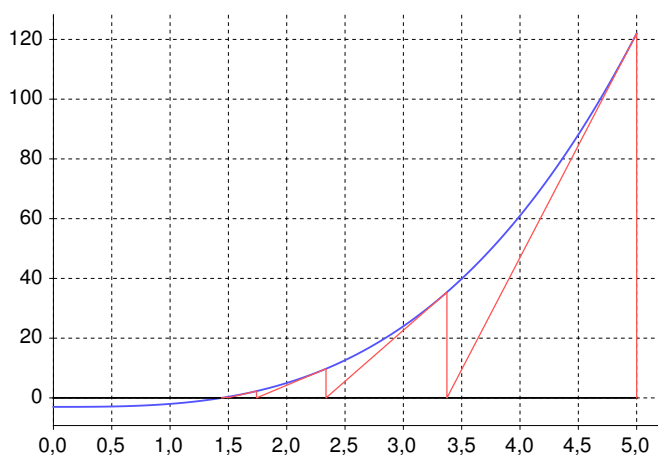
a ponieważ $g(x_n) = g'(x_n)(x_n - x_{n+1})$,

$$g'(x_n)(t - x_{n+1}) = -\frac{g''(c)}{2}(t - x_n)^2,$$

gdzie c leży pomiędzy t i x_n . Oszacowanie (9.30) wynika z nierówności $g' > 0$ –
w tym spośród przedziałów $[a, t)$, $(t, b]$, w którym znajduje się x_0 i wszystkie
kolejne wyrazy ciągu Newtona. \square

Ćwiczenie 9.5.1. Sformułować analogiczne twierdzenie dla funkcji wklę-
słych. Czy można je wywnioskować z Twierdzenia 9.5.7?

Uwaga 9.5.4. Nierówność (9.30) oznacza *zbieżność kwadratową* i implikuje realne i szybkie zmniejszanie błędu przybliżenia począwszy od wyrazu, w którym $\frac{M}{2m}|t - x_n| < 1$. Jest to widoczne także w kolejnym przykładzie, dla funkcji $x^3 - 3$.



Rysunek 9.4: Metoda Newtona dla funkcji $x^3 - 3$

Przykład 9.5.3. Ciąg iterowany (3.9) szybko zbieżny do liczby $\sqrt{2}$ jest ciągiem Newtona. Równie efektywny ciąg przybliżeń liczby $\sqrt[3]{3}$,

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2},$$

otrzymujemy wychodząc od równania $g(x) \equiv x^3 - 3 = 0$ dla $x \in [1, 5]$. Ciąg Newtona o punkcie startowym $x_0 = 5$ i kolejnych wyrazach

$$\begin{array}{ll} x_1 = 3,373333333333335... & x_5 = 1,4437994362362030... \\ x_2 = 2,3367671560075760... & x_6 = 1,4422512334365250... \\ x_3 = 1,7409788292572610... & x_7 = 1,4422495703093263... \\ x_4 = 1,4905758774387161... & x_8 = 1,4422495703074083... \end{array}$$

ilustruje nagły wzrost dokładności właściwy dla zbieżności kwadratowej (rys. 9.4). Oszacowanie (9.30) przybiera w tym przypadku postać

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{3} = \frac{2x_n + \sqrt[3]{3}}{3x_n^2}(x_n - \sqrt[3]{3})^2 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(x_n - \sqrt[3]{3})^2.$$

Rozdział 10

Cała całka Riemanna

10.1 Konstrukcja

Fizyczna interpretacja pojęcia całki odpowiada procesowi wyznaczania drogi przebytej w czasie $[a, b]$ przez badany obiekt (pojazd, cząsteczkę, planetę itp.), jeśli znana jest w tym czasie prędkość obiektu. Ograniczenia praktyczne pozwalają zmierzyć prędkość w chwilach stanowiących skończony ciąg zawarty w przedziale $[a, b]$, a przybliżenie długości przebytej drogi otrzymujemy sumując poszczególne odcinki, w których droga jest iloczynem zmierzonej prędkości i czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami. Powyższa obserwacja sugeruje, że całkowanie powinno być operacją odwrotną do różniczkowania, o czym przekonamy się w jednym z kolejnych podrozdziałów.

Każdy skończony podzbiór $P \subset [a, b]$ dzieli przedział na jednoznacznie określone pod-przedziały niezawierające wewnątrz punktów zbioru P . Dla wygody i jednoznaczności opisu możemy końce przedziału włączyć do P .

Definicja 10.1.1. Podziałem przedziału $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a < b$) nazywamy każdy skończony podzbiór P zawierający końce a i b przedziału. Rodzinę wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ oznaczamy symbolem $\mathcal{P}[a, b]$. Podział $P' \in \mathcal{P}[a, b]$ nazywamy podpodziałem lub zagęszczeniem podziału P , jeśli $P \subset P'$.

Ze względu na naturalny porządek liczb rzeczywistych, dla elementów podziału $P \subset [a, b]$ przyjmujemy standardowy, jednoznaczny opis postaci

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad \text{gdzie } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (10.1)$$

Tym samym – każdej liczbie $c \in P$ przyporządkowujemy jednoznaczny indeks (numer), $c = x_i$, $i \in \{0, \dots, n\}$, a sam przedział staje się sumą

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] = \bigcup_{i \leq n} [x_{i-1}, x_i]$$

kolejnych przedziałów o rozłącznym wnętrzu. Liczbę

$$\delta(P) = \max\{x_i - x_{i-1}; i \leq n\} > 0 \quad (10.2)$$

nazywamy *średnicą podziału*. Liczba $n \in \mathbb{N}$, czyli pomniejszona o 1 liczba punktów jest równa liczbie przedziałów, na które podział P dzieli $[a, b]$.

Definicja 10.1.2. Dla dowolnej funkcji ograniczonej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ dziedziny, dolną i odpowiednio górną sumą Darboux funkcji f względem P nazywamy liczby

$$L(f, P) = \sum_{i \leq n} m_i(f) \cdot \Delta_i P, \quad \text{oraz} \quad (10.3)$$

$$U(f, P) = \sum_{i \leq n} M_i(f) \cdot \Delta_i P, \quad (10.4)$$

gdzie $m_i(f) = \inf\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} \leq M_i(f) = \sup\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\}$ oraz $\Delta_i P = x_i - x_{i-1}$ dla $i \leq n$.

Definicję oraz metody wyznaczania całki Riemanna wspiera

Lemat 10.1.1. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą na przedziale $[a, b]$.

(i) Dla dowolnego podziału P przedziału $[a, b]$,

$$-U(-f, P) = L(f, P) \leq U(f, P) = -L(-f, P).$$

(ii) Dla dowolnych podziałów $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$, jeśli $P \subset Q$, to

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(f, Q) - L(f, P) \leq 2m M \delta(P) \quad i \\ 0 &\leq U(f, P) - U(f, Q) \leq 2m M \delta(P), \end{aligned}$$

gdzie m jest liczbą punktów zbioru $Q \setminus P$, a $M = \sup\{|f(x)|; x \in (a, b)\}$. W szczególności, prawdziwe są nierówności

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P). \quad (10.5)$$

Różnicę między sumą górną i sumą dolną Darboux funkcji f (względem tego samego podziału P) będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta(f, P) := U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) \Delta_i P. \quad (10.6)$$

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że z (10.5) wynika

Wniosek 10.1.2. $0 \leq \Delta(f, Q) \leq \Delta(f, P)$, jeśli $P \subset Q$. \square

Dowód Lematu 10.1.1. Własność (i) wynika z nierówności $m_i(f) \leq M_i(f)$ oraz równości $M_i(-f) = -m_i(f)$, oczywistych dla każdego przedziału podziału P .

Dla dowodu (ii) rozważmy przypadek, gdy $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, a $Q \supset P$ jest zagęszczeniem powstałym z P przez dołączenie pojedynczego punktu $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$ dla pewnego $k \leq n$. Przy oznaczeniach

$$M_l^* = \sup\{f(x); x \in (x_{k-1}, x^*)\} \quad \text{ i } \quad M_r^* = \sup\{f(x); x \in (x^*, x_k)\}$$

różnica górnych sum Darboux redukuje się do

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, Q) &= M_k(f)(x_k - x_{k-1}) - M_l^*(x^* - x_{k-1}) - M_r^*(x_k - x^*) \\ &= (M_k(f) - M_l^*)(x^* - x_{k-1}) + (M_k(f) - M_r^*)(x_k - x^*), \end{aligned}$$

co daje $0 \leq U(f, P) - U(f, Q) \leq 2M\delta(P)$. W ogólnym przypadku wystarczy skorzystać z rozkładu

$$U(f, P) - U(f, Q) = (U(f, P^0) - U(f, P^1)) + \dots + (U(f, P^{m-1}) - U(f, P^m))$$

gdzie $P = P^0 \subset P^1 \subset \dots \subset P^m = Q$, a kolejne podziały różnią się jednym punktem. Dowód analogicznych nierówności dla sum dolnych Darboux wynika z udowodnionej już własności (i). \square

Definicja 10.1.3. Dla dowolnej ograniczonej funkcji rzeczywistej f określonej na przedziale $[a, b]$ całką dolną i odpowiednio całką górną nazywamy liczby

$$L_a^b(f) = \sup \{L(f, P); P \in \mathcal{P}[a, b]\} \quad \text{ i } \quad U_a^b(f) = \inf \{U(f, P); P \in \mathcal{P}[a, b]\}. \quad (10.7)$$

Wniosek 10.1.3. Dla dowolnych podziałów P_1, P_2 przedziału $[a, b]$ i dowolnej funkcji ograniczonej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

$$L(f, P_1) \leq L_a^b(f) \leq U_a^b(f) \leq U(f, P_2), \quad (10.8)$$

a więc także

$$0 \leq U_a^b(f) - L_a^b(f) \leq \Delta(f, P) \quad \text{ dla } P \in \mathcal{P}[a, b]. \quad (10.9)$$

Dowód. Z faktu, że suma $P = P_1 \cup P_2$ dowolnych dwu podziałów jest ich wspólnym zagęszczeniem, wynikają nierówności

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2),$$

a zatem każda z sum górnych Darboux funkcji f jest ograniczeniem górnym dla zbioru sum dolnych. Po przejściu do kresów oznacza to ograniczenie

$$L_a^b(f) \leq U(f, P_2) \quad \text{dla każdego } P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$$

i w konsekwencji $L_a^b(f) \leq U_a^b(f)$, co kończy dowód nierówności (10.8). W przypadku $P_1 = P_2 = P$ otrzymujemy stąd natychmiast nierówność (10.9). \square

Definicja 10.1.4. *Funkcja ograniczona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli jej całki górna i dolna są równe. Liczbę*

$$\int_a^b f = L_a^b(f) = U_a^b(f) \quad (10.10)$$

nazywamy wówczas całką Riemanna funkcji f .

Funkcja zmiennej rzeczywistej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b] \subset X$, jeśli całkowalne jest obcięcie $f|_{[a, b]}$. W takim przypadku korzystamy także z uproszczonego oznaczenia

$$\int_a^b f = \int_a^b (f|_{[a, b]}), \quad (10.11)$$

a liczbę $\int_a^b f$ nazywamy całką Riemanna na przedziale $[a, b]$.

Przykład 10.1.1 (Podstawowy). Funkcja stała $f(x) = h \in \mathbb{R}$ dla $x \in [a, b]$ jest całkowalna i $\int_a^b h = h(b - a)$. W tym przypadku dla każdego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ zachodzi równość

$$L(f, P) = U(f, P) = \sum_{i \leq n} h \cdot (x_i - x_{i-1}) = h \cdot (x_n - x_0).$$

Całka Riemanna jest w tym przypadku *polem prostokąta* o podstawie $[a, b]$ i wysokości h .

Znamy już elementarną fizyczną interpretację całki jako długości drogi zależnej od prędkości badanego obiektu. Naturalna interpretacja geometryczna pozwala postrzegać całkę $\int_a^b f$ jako *pole pod wykresem* funkcji $f \geq 0$. Precyzyjny opis tej własności czytelnik znajdzie w rozdziale dotyczącym

miar, a póki co – zachęcamy do naszkicowania rysunku, w którym poszczególnym składnikom dolnych i górnych sum Darboux odpowiadają pola prostokątów pokrywających wykres funkcji (od wewnątrz – z dołu i z zewnątrz – od góry).

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności pozwalające interpretować całkę jako specyficzną metodę wyznaczania *wartości średniej* badanej funkcji.

Twierdzenie 10.1.4 (O monotoniczności całki). (i) *Dla dowolnej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ całkownej w sensie Riemanna zachodzą nierówności*

$$\inf\{f(x); x \in (a, b)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \sup\{f(x); x \in (a, b)\}. \quad (10.12)$$

(ii) *Jeśli funkcje $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowne i $f \leq g$, to*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

W szczególności, $\int_a^b f \geq 0$, jeśli $f \geq 0$.

Dowód. Własność (10.12) wyprowadzamy z nierówności

$$\inf\{f(x); x \in (a, b)\}(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \sup\{f(x); x \in (a, b)\}(b-a)$$

prawdziwej dla każdego podziału P przedziału $[a, b]$. Z nierówności $f \leq g$ wynika zależność $L(f, P) \leq L(g, P) \leq L_a^b(g)$, a więc także $L_a^b(f) \leq L_a^b(g)$. \square

Sprawdzanie całkowności funkcji ułatwia

Twierdzenie 10.1.5 (Kryterium Riemanna). (i) *Funkcja ograniczona f na przedziale $[a, b]$ jest całkowna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\inf\{\Delta(f, P); P \in \mathcal{P}[a, b]\} = 0, \quad (10.13)$$

tzn., gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje podział P_ε taki, że $\Delta(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

(ii) *Warunek Riemanna (10.13) jest równoważny istnieniu takiego ciągu podziałów $P_k, k \in \mathbb{N}$, że $\lim_k \Delta(f, P_k) = 0$. Jeśli warunek ten jest spełniony, to zachodzi równość*

$$\int_a^b f = \lim_k U(f, P_k) = \lim_k L(f, P_k). \quad (10.14)$$

Dowód. Dostateczność warunku Riemanna podanego w (i) wynika natychmiast z nierówności (10.9). Odwrotnie – jeśli f jest funkcją całkowalną, a ε dowolną liczbą dodatnią, to z definicji kresów wynika istnienie podziałów $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ takich, że $L(f, P_1) > L_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ i $U(f, P_2) < U_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec Lematu 10.1.1, obie nierówności zostają zachowane dla wspólnego podziału $P = P_1 \cup P_2$, a zatem

$$\Delta(f, P) = U(f, P) - L(f, P) < (U_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2}) - (L_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Warunek $\Delta(f, P_k) \rightarrow 0$ jest ciągłym odpowiednikiem warunku Riemanna. Jeśli jest spełniony, to funkcja f jest całkowalna, a równości (10.14) – w tym zbieżność ciągów – wynikają z oszacowania

$$\int_a^b f \leq U(f, P_k) = L(f, P_k) + \Delta(f, P_k) \leq \int_a^b f + \Delta(f, P_k) \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

oraz twierdzenia o trzech ciągach. \square

Uważny czytelnik zauważył zapewne, że konstrukcja całki $\int_a^b f$ nie zależy zupełnie od wartości $f(a), f(b)$ i wobec tego rozszerza się w oczywisty sposób na funkcje określone na ograniczonym przedziale otwartym (a, b) . Ogólniejszą obserwację zawiera

Wniosek 10.1.6. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, a $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją taką, że zbiór $\{x; f(x) \neq g(x)\}$ jest skończony, to funkcja g jest całkowalna i zachodzi równość $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Dowód. Oznaczmy $P' = \{x; f(x) \neq g(x)\}$. Jeśli podział $P \in \mathcal{P}[a, b]$ spełnia warunek Riemanna $\Delta(f, P) < \varepsilon$, dla pewnego $\varepsilon > 0$, to zgodnie z Wnioskiem 10.1.2 zagęszczenie $Q = P \cup P'$ spełnia warunek

$$0 \leq \Delta(g, Q) = \Delta(f, Q) \leq \Delta(f, P) < \varepsilon,$$

gdzie korzystamy z faktu, iż sumy górne i dolne Darboux nie zależą od wartości funkcji w punktach podziału. \square

Uwaga 10.1.1. Zgodnie z Wnioskiem 10.1.6 zmiana wartości funkcji w skończonej liczbie punktów dziedziny nie wpływa na całkowalność. Możemy zatem włączyć do rozważań i badać całkowalność funkcji określonych na przedziale – z wyłączeniem dowolnego skończonego podzbioru, np. nieokreślonej na końcach przedziału będącego dziedziną funkcji.

Przykład 10.1.2. Zmiana wartości funkcji całkowanej na zbiorze przeliczalnym może prowadzić do funkcji niecałkowanej w sensie Riemanna. Przykładem jest funkcja Dirichleta χ dana wzorem (7.8), dla której $U_a^b(\chi) = 1$, a $L_a^b(\chi) = 0$. Funkcja Dirichleta jest – poza przeliczalnym zbiorem $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ – równa całkowanej funkcji 0.

Przykład 10.1.3 (Całkowalność funkcji $\text{id}_{[a,b]}$). Dla funkcji tożsamościowej $\text{id} = \text{id}_{[a,b]}: x \mapsto x$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważamy podział *równomierny* $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ taki że $x_i = a + h_n i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, gdzie $h_n = \frac{b-a}{n}$ jest średnicą podziału. Ponieważ $m_i(\text{id}) = x_{i-1}$ i $M_i(\text{id}) = x_i$, zachodzą równości

$$L(\text{id}, P_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1} h_n \quad \text{ i } \quad U(\text{id}, P_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_n.$$

Z zależności $U(\text{id}, P_n) - L(\text{id}, P_n) = nh_n^2 = \frac{(b-a)^2}{n}$ wynika całkowalność funkcji. Wartość całki Riemanna otrzymujemy np. jako granicę ciągu sum górnych

$$U(\text{id}, P_n) = \sum_{i=1}^n (a + h_n i) h_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2},$$

a zatem $\int_a^b \text{id} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, co zapisujemy raczej w postaci

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Jak zwykle, w sytuacji, gdy badana funkcja f opisana jest poprzez jawny wzór $f(x)$ dla $x \in [a, b]$, powszechnie stosowana jest alternatywna notacja, tym razem w postaci

$$\int_a^b f(x) \, dx \equiv \int_a^b f, \quad (10.15)$$

wyróżniającą zmienną, względem której wyznaczana jest całka.

Uwaga 10.1.2. Część autorów korzysta w definicji sum Darboux z kresów funkcji f po przedziałach domkniętych. Nie ma to wpływu na całkowalność funkcji, ani na wartość całki Riemanna. Przyjęta wyżej konwencja istotnie upraszcza niektóre dowody, co uważny czytelnik zapewne zauważył dla Wniosku 10.1.6 i doceni w podrozdziale 11.3.

Nie korzystamy także z szerzej stosowanych symboli $\underline{\int}_a^b$ oraz $\overline{\int}_a^b$ dla dolnej i, odpowiednio, górnej całki Riemanna, które zapisujemy w uproszczony sposób jako L_a^b i U_a^b .

Jeżeli wiemy, że funkcja f jest całkowalna, mamy względnie prosty zestaw metod wyznaczania (przybliżania) całki Riemanna.

Definicja 10.1.5. *Jeśli $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ jest dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$, to każdy ciąg $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ liczb $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ dla $i \leq n$ nazywamy wyborem dla podziału P . Sumą Riemanna dla funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ względem podziału P (i wyboru ξ) nazywamy liczbę*

$$R_\xi(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (10.16)$$

Ogólniej, za sumę Riemanna dla funkcji f względem podziału P będziemy uważać każde wyrażenie postaci

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1}) \in [L(f, P), U(f, P)], \quad (10.17)$$

gdzie współczynniki f_i spełniają warunek

$$\inf\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} \leq f_i \leq \sup\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} \quad \text{dla } i \leq n.$$

Sumy Riemanna pojawiły się w oryginalnej konstrukcji Riemanna i zastępują nie zawsze łatwe do wyznaczenia kresy górne i dolne przez pośrednie wartości funkcji f . Wprawdzie klasyczna już teraz konstrukcja całki Riemanna wykorzystuje raczej podejście Darboux, sumy Riemanna mają ciągle znaczenie jako jedna z metod przybliżonego wyznaczania całki.

Twierdzenie 10.1.7 (Darboux). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją całkowalną w sensie Riemanna.*

(i) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego podziału $P \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy $\delta(P) < \delta$,*

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon. \quad (10.18)$$

(ii) *Dla każdego ciągu podziałów $P_k \in \mathcal{P}[a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, jeśli $\lim_k \delta(P_k) = 0$, to dowolne sumy Riemanna funkcji f względem podziałów P_k tworzą ciąg zbieżny i*

$$\lim_k R(f, P_k) = \int_a^b f(x)dx. \quad (10.19)$$

Pełna wersja twierdzenia podaje zbieżność ciągu sum Riemanna $R(f, P_k)$, $k \in \mathbb{N}$, niezależnie od dokonanych wyborów, jako warunek konieczny i dostateczny całkowalności funkcji f .

Dowód. Niech f będzie funkcją całkowalną. Zgodnie z warunkiem Riemanna (10.13) dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje podział P_0 taki, że $U(f, P_0) - L(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$; niech m oznacza liczbę przedziałów podziału P_0 . Połóżmy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4mM}, \quad \text{gdzie } M = \sup\{|f(x)|; x \in (a, b)\}.$$

Dla dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy mniejszej niż δ rozważmy wspólne zagęszczenie $P^* = P \cup P_0$, co daje

$$U(f, P^*) \leq U(f, P_0) < L(f, P_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

i analogicznie $L(f, P^*) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$. Korzystając z Lematu 10.1.1(ii) otrzymujemy oszacowania

$$U(f, P) = U(f, P^*) + (U(f, P) - U(f, P^*)) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + 2mM\delta(P) < \int_a^b f + \varepsilon,$$

oraz $L(f, P) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} - 2mM\delta(P) > \int_a^b f - \varepsilon$. Własność (ii) wynika teraz z (i) i oczywistej nierówności $L(f, P_k) \leq R(f, P_k) \leq U(f, P_k)$ dla $k \in \mathbb{N}$. \square

10.2 Funkcje całkowalne

Korzystając z kryterium całkowalności sformułowanego jako warunek Riemanna (10.13)–(10.14) udowodnimy teraz

Twierdzenie 10.2.1 (O całkowalności). *Dowolna funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeżeli*

- (i) *f jest monotoniczna lub*
- (ii) *f jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Rozważmy dowolny podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Całkowalność funkcji monotonicznych wykażemy w przypadku, gdy funkcja f jest nie-
malejąca. Zachodzą wówczas nierówności $f(x_{i-1}) \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq f(x_i)$ dla $i \leq n$, a więc

$$\Delta(f, P) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\delta(P) = (f(b) - f(a))\delta(P).$$

Różnica $\Delta(f, P_n) = U(f, P_n) - L(f, P_n)$ dąży zatem do 0, dla dowolnego ciągu podziałów o średnicach spełniających warunek $\lim_n \delta(P_n) = 0$. Stąd całkowalność f .

Założmy teraz, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Pozwala to skorzystać z jednostajnej ciągłości f (Twierdzenie 6.2.8) i wybrać $\delta > 0$ takie, że

$$|y - z| < \delta \implies |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{dla } y, z \in [a, b].$$

Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ oznacza dowolny podział o średnicy mniejszej niż δ . Jeśli na każdym z przedziałów podziału P funkcja $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ osiąga maksimum w punkcie y_i , a minimum w z_i , to

$$M_i(f) - m_i(f) \leq f(y_i) - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{dla } i \leq n,$$

i wobec tego prawdziwa jest nierówność

$$\Delta(f, P) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Z kryterium Riemanna wnioskujemy o całkowalności funkcji f . \square

Kolejny ważny, raczej elementarny wynik dotyczy całkowalności obcięcia funkcji lub – dla odmiany – sklejenia funkcji całkowalnych.

Twierdzenie 10.2.2. *Dla każdego $c \in (a, b)$ funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy całkowalna jest każda z funkcji $f|_{[a, c]}$ i $f|_{[c, b]}$; ponadto wówczas*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (10.20)$$

Dowód. Każdy podział $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ zawierający liczbę c daje się jednoznacznie przedstawić jako sumę $P = P^l \cup P^r$ podziałów $P^l = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, c]$ i $P^r = \{x_k, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[c, b]$, przy czym $k < n$ jest jedynym indeksem, dla którego $x_k = c$. Przyjmując oznaczenia $f^l = f|_{[a, c]}$ i $f^r = f|_{[c, b]}$, z oczywistych równości

$$L(f, P) = L(f^l, P^l) + L(f^r, P^r) \quad \text{i} \quad U(f, P) = U(f^l, P^l) + U(f^r, P^r)$$

wyprowadzamy tożsamość

$$\Delta(f, P) = \Delta(f^l, P^l) + \Delta(f^r, P^r) \quad (10.21)$$

dla poszczególnych różnic (10.6) występujących w warunku Riemanna rozważanych funkcji i podziałów. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, z całkowalności funkcji f wynika istnienie podziału $Q \in \mathcal{P}[a, b]$ takiego, że $\Delta(f, Q) < \varepsilon$. Ponieważ

nierówność ta przenosi się na podział $P = Q \cup \{c\}$, z (10.21) wynika, że każda z funkcji f^l i f^r spełnia warunek Riemanna. Jeśli natomiast funkcje f^l i f^r są całkowalne, a P^l i P^r są podziałami takimi, że $\Delta(f^l, P^l) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\Delta(f^r, P^r) < \frac{\varepsilon}{2}$, to $\Delta(f, P) < \varepsilon$ dla podziału $P = P^l \cup P^r$ – i funkcja f spełnia warunek Riemanna.

Dla dowodu równości (10.20) wystarczy rozważyć dowolne dwa ciągi podziałów $P_n^l \in \mathcal{P}[a, c]$ i $P_n^r \in \mathcal{P}[c, b]$, $n \in \mathbb{N}$, dla których oba ciągi $(\Delta(f^l, P_n^l))_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\Delta(f^r, P_n^r))_{n \in \mathbb{N}}$ dążą do 0. Wówczas np. sumy górne dążą do odpowiednich całek Riemanna z funkcji f , a więc

$$\int_a^b f = \lim_n U(f, P_n^l \cup P_n^r) = \lim_n U(f^l, P_n^l) + \lim_n U(f^r, P_n^r) = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

co było do okazania. \square

Wniosek 10.2.3. *Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to dla dowolnego przedziału $[c, d] \subset [a, b]$ funkcja $f|_{[c, d]}$ jest także całkowalna.* \square

Dość oczywisty – w tym momencie – Wniosek 10.2.3 pozwala traktować całkowalność funkcji jako własność lokalną.

Definicja 10.2.1. *Funkcję rzeczywistą $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określoną na dowolnym przedziale $J \subset \mathbb{R}$ będziemy nazywać lokalnie całkowalną, jeśli dla każdego ograniczonego przedziału domkniętego $[a, b] \subset J$ obcięcie $f|_{[a, b]}$ jest funkcją całkowalną.*

Lokalna całkowalność ma znaczenie w tych sytuacjach, które *nie mieszczą się* w przyjętej wyżej definicji całki Riemanna. Dotyczy to funkcji określonych na nieograniczonym przedziale lub nieograniczonych w sąsiedztwie któregoś z końców przedziału. W przypadku, gdy zarówno dziedzina jak i zbiór wartości badanej funkcji są ograniczone, lokalna całkowalność nie różni się od całkowalności w zwykłym sensie, o czym zapewniamy

Twierdzenie 10.2.4 (O lokalnej całkowalności). *Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną określoną na ograniczonym przedziale otwartym. Jeśli f jest lokalnie całkowalna, to jest całkowalna na przedziale domkniętym $[a, b]$ i zachodzą równości*

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f. \quad (10.22)$$

Przypominamy, że – jak zostało podkreślone w Uwadze 10.1.1 – brak zdefiniowanych wartości funkcji f w końcach przedziału nie wpływa na możliwość wyznaczania całki.

Wniosek 10.2.5. *Każda funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczona i ciągła na przedziale otwartym jest całkowalna w sensie Riemanna.* \square

Dowód Twierdzenia 10.2.4. Istnieje liczba M taka, że $|f(x)| < M$ dla wszystkich $x \in (a, b)$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ ustalmy liczby $\alpha, \beta \in (a, b)$ w ten sposób, by

$$\alpha < \beta \quad \text{ i } \quad \max\{\alpha - a, b - \beta\} < \frac{\varepsilon}{5M}.$$

Z lokalnej całkowalności funkcji f wynika całkowalność funkcji $g = f|_{[\alpha, \beta]}$, a zatem istnieje podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[\alpha, \beta]$, taki że $\Delta(g, P) < \frac{\varepsilon}{5}$. Wówczas zbiór $Q = P \cup \{a, b\}$ jest podziałem przedziału $[a, b]$, przy czym

$$\Delta(f, Q) \leq 2M(\alpha - a) + \Delta(g, P) + 2M(b - \beta) < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza to całkowalność funkcji f .

Dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \in (a, b)$ ze wzoru (10.20) i nierówności (10.12) wynikają oszacowania

$$\left| \int_a^b f - \int_a^\alpha f \right| = \left| \int_a^\alpha f \right| \leq M(\alpha - a) \quad \text{ i } \quad \left| \int_a^b f - \int_a^\beta f \right| = \left| \int_\beta^b f \right| \leq M(b - \beta),$$

a to oznacza istnienie granic i równości (10.22). \square

Z dwu poprzednich twierdzeń wynika natychmiast

Wniosek 10.2.6. *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczona i mająca skończoną liczbę punktów nieciągłości jest całkowalna w sensie Riemanna.* \square

Sformułowane wyżej twierdzenia i wnioski pozwalają stwierdzić całkowalność funkcji $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, która na przedziałach otwartych powstałych z pewnego skończonego podziału dziedziny jest ciągła lub monotoniczna.

Uwaga 10.2.1. Z Twierdzenia 7.5.2(ii) wiemy, że każda funkcja monotoniczna ma co najwyżej przeliczalny zbiór punktów nieciągłości, co – zgodnie z Twierdzeniem 10.2.1(i) – nie przeszkadza temu, by była całkowalna. Przekonamy się w podrozdziale 11.4, że całkowalna jest *każda* funkcja o przeliczalnym zbiorze punktów nieciągłości. Pełna charakterystyka zawarta w Twierdzeniu 11.4.1 uzależnia całkowalność w sensie Riemanna od (miary) zbioru punktów nieciągłości.

Rozszerzająca rodzinę funkcji całkowalnych (w sensie Riemanna) o funkcje, które powstają w wyniku standardowych działań, skorzystamy z następującej, elementarnej własności kresów.

Stwierdzenie 10.2.7. (i) Dla dowolnego ograniczonego, niepustego podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ i dowolnej liczby $c > 0$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} \sup\{cx; x \in A\} &= c \cdot \sup A & i & \sup\{-x; x \in A\} = -\inf A, \text{ oraz} \\ \inf\{cx; x \in A\} &= c \cdot \inf A & i & \inf\{-x; x \in A\} = -\sup A. \end{aligned} \quad (10.23)$$

(ii) Niech A, B będą dowolnymi niepustymi podzbiorymi w \mathbb{R} . Wówczas

$$\sup A + \sup B = \sup\{x + y; x \in A, y \in B\}, \quad (10.24)$$

jeśli A i B są ograniczone z góry, natomiast

$$\inf A + \inf B = \inf\{x + y; x \in A, y \in B\}, \quad (10.25)$$

jeśli zbiory A i B są ograniczone z dołu.

Dowód. (i) Dla dowolnej liczby c oznaczmy $c \cdot A = \{cx; x \in A\}$. Jeśli $c > 0$, zachodzą równości $\mathcal{I}(c \cdot A) = c \cdot \mathcal{I}(A)$ i $\mathcal{S}(c \cdot A) = c \cdot \mathcal{S}(A)$. W przypadku $c = -1$, dla zbioru $-A = (-1)A$ korzystamy z równoważności

$$M \in \mathcal{S}(-A) \iff \forall_{a \in A} (-a \leq M),$$

a to oznacza $\forall_{a \in A} a \geq -M$, czyli $-M \in \mathcal{I}(A)$. Wynika stąd, że M jest najmniejszą liczbą w $\mathcal{S}(-A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-M = \inf A$ jest największą liczbą w $\mathcal{I}(A)$. Zastępując zbiór A przez $-A$ otrzymujemy ostatnią z równości (10.23).

(ii) Dla dowolnych liczb $a \in A$ i $b \in B$ zachodzą nierówności $a \leq \sup A$ i $b \leq \sup B$, a zatem $a + b \leq \sup A + \sup B$. Ostatnia z sum jest zatem ograniczeniem górnym zbioru $C := \{x + y; x \in A, y \in B\}$, co oznacza nierówność $\sup C \leq \sup A + \sup B$. Dla dowodu nierówności przeciwnej ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z charakteryzacji kresów podanej w Twierdzeniu 2.1.3 wynika istnienie liczb $a \in A$ i $b \in B$ takich, że $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ i $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$, a więc

$$\sup C \geq a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ otrzymujemy stąd postulowaną nierówność $\sup C \geq \sup A + \sup B$, co kończy dowód równości (10.24). Analogiczna równość dla kresów dolnych wynika z wykazanego w (i) związku pomiędzy kresami dolnymi i górnymi. \square

Jako wniosek otrzymujemy stąd pomocniczy

Lemat 10.2.8. Dla dowolnego podziału P różnica (10.6) między sumami górną i dolną Darboux wynosi

$$\Delta(f, P) = \sum_{i=1}^n \sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in (x_{i-1}, x_i)\} \cdot \Delta_i P.$$

Dowód. Jeśli $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, to dla każdego $i \leq n$ ze Stwierdzenia 10.2.7 wyprowadzamy równości

$$\begin{aligned} M_i(f) - m_i(f) &= \sup\{f(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} + \sup\{-f(y); y \in (x_{i-1}, x_i)\} \\ &= \sup\{f(x) - f(y); x, y \in (x_{i-1}, x_i)\}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych x, y mamy

$$|f(x) - f(y)| = \max\{f(x) - f(y), f(y) - f(x)\},$$

z kryterium porównawczego dla kresów (Twierdzenie 2.1.4(ii)) wynikają równości $M_i(f) - m_i(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in (x_{i-1}, x_i)\}$ dla $i \leq n$. \square

Twierdzenie 10.2.9. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją całkowalną.

- (i) Dla każdego $c \in \mathbb{R}$ funkcja cf jest całkowalna i $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.
- (ii) Funkcje $|f|$ i f^2 są całkowalne, przy czym $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Dowód. (i) Dla dowolnego podziału P przedziału $[a, b]$ nierówność

$$L(-f, P) \leq - \int_a^b f \leq U(-f, P)$$

oraz równość $\Delta(-f, P) = \Delta(f, P)$ otrzymujemy z Lematu 10.1.1(i). Wynika stąd całkowalność funkcji $-f$ i równość $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$, czyli przypadek $c = -1$. Sprawdzenie własności (i) dla dowolnej stałej $c \geq 0$ jest prostą konsekwencją tożsamości $m_i(cf) = c m_i(f)$ i $M_i(cf) = c M_i(f)$ dla każdego przedziału tworzącego podział P .

(ii) Nierówność trójkąta w postaci $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ prowadzi zgodnie z Lematem 10.2.8 do oszacowania $\Delta(|f|, P) \leq \Delta(f, P)$, co implikuje całkowalność funkcji $|f|$. Z monotoniczności całki Riemanna (Twierdzenie 10.1.4(ii)) wynikają nierówności

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

czyli $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. Z kolei nierówność

$$|f(x)^2 - f(y)^2| = |f(x) + f(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|,$$

gdzie $M = \sup\{|f(x)|; x \in (a, b)\}$, implikuje oszacowanie

$$\Delta(f^2, P) \leq 2M\Delta(f, P),$$

z którego wynika całkowalność funkcji f^2 . \square

Twierdzenie 10.2.10. *Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą dowolnymi funkcjami całkowalnymi o wspólnej dziedzinie $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

(i) *Funkcje $f \pm g$ są całkowalne w sensie Riemanna i zachodzi równość*

$$\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g. \quad (10.26)$$

(ii) *Funkcja $\min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ dla $x \in [a, b]$ oraz analogicznie zdefiniowana funkcja $\max(f, g): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Z własności (i) oraz z Twierdzenia 10.2.9(iii) wynika natychmiast ważny

Wniosek 10.2.11. *Jeśli funkcje $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne, to iloczyn $f \cdot g$ również jest całkowalny w sensie Riemanna i zachodzi nierówność*

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sup |f| \int_a^b |g|. \quad \square$$

Dowód Twierdzenia 10.2.10. (i) Całkowalność funkcji $-g$ pozwala ograniczyć dowód tożsamości (10.26) do przypadku sumy $f + g$ dwu funkcji całkowalnych. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Dla każdego $i \leq n$ stwierdzamy zależność

$$\begin{aligned} m_i(f) + m_i(g) &= \inf \{f(x) + g(y); x, y \in (x_{i-1}, x_i)\} \\ &\leq \inf \{f(x) + g(x); x \in (x_{i-1}, x_i)\} = m_i(f + g), \end{aligned}$$

gdzie pierwsza z równości wynika ze Stwierdzenia 10.2.7(ii), a nierówność – z monotoniczności kresu dolnego (względem zawierania zbiorów). Ponieważ analogiczna nierówność $M_i(f) + M_i(g) \geq M_i(f + g)$ zachodzi dla kresów górnych, wynikają stąd oszacowania

$$\begin{aligned} L(f, P) + L(g, P) &\leq L(f + g, P) \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P) \quad \text{ i } \\ 0 &\leq \Delta(f + g, P) \leq \Delta(f, P) + \Delta(g, P). \end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że jeśli dla ustalonych ciągów podziałów P'_k i P''_k , $k \in \mathbb{N}$, ma miejsce zbieżność $\Delta(f, P'_k), \Delta(g, P''_k) \rightarrow 0$, to wspólne zagęszczenia $P_k = P'_k \cup P''_k$ potwierdzają spełnienie kryterium Riemanna

$$\Delta(f + g, P_k) \rightarrow 0 \quad \text{ dla } k \rightarrow \infty,$$

a z Twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy równość (10.26) dla sumy. Wobec Twierdzenia 10.2.9 wynika stąd całkowalność każdej z funkcji f^2, g^2 i $(f+g)^2$ – a więc także funkcji

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2).$$

(ii) Z tego samego powodu, co wyżej, tożsamości

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f+g - |f-g|) \quad \text{ i } \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g + |f-g|) \quad (10.27)$$

implikują całkowalność funkcji $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$. \square

Ćwiczenie 10.2.1. Sprawdzić tożsamości (10.27).

Twierdzenie 10.2.12 (O wartości średniej dla całki). *Dla dowolnej funkcji $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczonej i ciągłej na przedziale otwartym istnieje liczba $c \in (a, b)$, taka że*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c). \quad (10.28)$$

Jeśli ponadto $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną całkowalną funkcją nieujemną, to w przedziale otwartym (a, b) istnieje c takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (10.29)$$

Niestandardowe, słabsze niż przyjmowane na ogół założenie ciągłości funkcji f będzie nam potrzebne w podrozdziale 11.5 dotyczącym aproksymacji całek.

Dowód. Własność (10.28) jest oczywistym wnioskiem z (10.29) – dla funkcji $g \equiv 1$. Ograniczając się zatem do dowodu drugiej równości, oznaczmy przez $m = \inf(f)$ i $M = \sup(f)$ kresy (skończone) zbioru $f[(a, b)]$. Z oszacowania $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in (a, b)$ wynikają nierówności

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g. \quad (10.30)$$

W przypadku trywialnym, gdy $\int_a^b g = 0$, całka z iloczynu fg jest równa 0 i za c możemy przyjąć dowolny punkt dziedziny. Załóżmy zatem, że $\int_a^b g \neq 0$, a iloraz całek $C := \int_a^b fg / \int_a^b g$ mieści się w przedziale $[m, M]$. Jeśli C nie jest jednym z końców przedziału, wówczas funkcja $f|_{(a,b)}$ przyjmuje zarówno wartości mniejsze jak i większe od C , a zatem z ciągłości i własności Darboux wynika równość $C = f(c)$ dla pewnego $c \in (a, b)$. Pozostaje rozważyć

dwa przypadki skrajne. W pierwszym, gdy $C = m$ jest kresem dolnym funkcji f i $f(x) > m$ dla wszystkich $x \in (a, b)$, lewa z nierówności występujących w (10.30) jest równością. Dla każdego przedziału domkniętego $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ Twierdzenie Weierstrassa (tw. 6.3.4) zapewnia, że kres dolny ε funkcji $f|_{[\alpha, \beta]} - m$ jest dodatni, a zatem z nierówności

$$0 \leq \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} g \leq \int_{\alpha}^{\beta} (f - m)g \leq \int_a^b (f - m)g = 0$$

wynika równość $\int_{\alpha}^{\beta} g = 0$. Równość $\int_a^b g = 0$ wyprowadzamy ze sformułowanej w (10.22) własności całek oznaczającej ciągłą zależność od granic całkowania. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że całka $\int_a^b g$ znika także w przypadku, gdy $C = M$. \square

10.3 Związek całki z pochodną

Dla danej funkcji całkwalnej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ i liczby $c \in J$ formalna definicja całki Riemanna pozwala rozważać wielkość $F(x) = \int_c^x f$, jako funkcję granicy całkowania, wyłącznie dla $x \in J \cap (c, \infty)$. Prosty sposób na usunięcie tego ograniczenia – bez zmiany definicji – jest rozszerzenie znaczenia wprowadzonej do tej pory notacji. Przyjmujemy zatem oznaczenia

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt \quad \text{dla } a > b \quad \text{i} \quad \int_a^a f(t)dt = 0. \quad (10.31)$$

Ćwiczenie 10.3.1. Sprawdzić, że dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ i funkcji f całkwalnej w przedziale zawierającym zbiór $\{a, b, c\}$ zachodzi równość

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Ograniczamy się do funkcji rzeczywistych określonych na dowolnym niezdegenerowanym, także nieograniczonym przedziale $J \subset \mathbb{R}$. Podstawą dla badania relacji pomiędzy całkwalnością i różniczkowalnością funkcji jest

Twierdzenie 10.3.1 (Podstawowe Twierdzenie Rachunku Całkowego). *Dla dowolnej funkcji lokalnie całkwalnej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego punktu $c \in J$ funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{dla } x \in J \quad (10.32)$$

jest ciągła. Funkcja F jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in J$, w którym funkcja f jest ciągła, przy czym

$$F'(x) = f(x). \quad (10.33)$$

Jeśli funkcja f jest lewostronnie ciągła w $t \in J$, to $F'_-(x) = f(x)$, jeśli prawostronnie, to $F'_+(x) = f(x)$.

Dowód. Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją lokalnie całkowną. Dla dowolnego $x \in J$ niebędącego prawym końcem przedziału ustalmy punkt $x' \in J$, taki że $x' > x$, a zatem funkcja f jest całkowna na przedziale $[x, x'] \subset J$. Ponieważ całkowność w sensie Riemanna implikuje ograniczoność, istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że $|f(t)| \leq M$ dla wszystkich $t \in [x, x']$. Dla dowolnego $y \in [x, x']$ z nierówności (10.12) wynika zatem oszacowanie

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M(y - x),$$

a z warunku Cauchy'ego (6.10) otrzymujemy prawostronną ciągłość funkcji F w punkcie x . Korzystając z tożsamości

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) = \frac{1}{y - x} \left(\int_x^y f(t) dt - f(x) \int_x^y 1 dt \right) = \frac{1}{y - x} \int_x^y (f(t) - f(x)) dt,$$

załóżmy ponadto, że funkcja f jest prawostronnie ciągła w x . Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\forall t \in [x, x'] \quad t - x < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon,$$

a więc także

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| \leq \frac{1}{y - x} \int_x^y |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon$$

dla wszystkich $y \in (x, x']$ spełniających warunek $y - x < \delta$. Zgodnie z definicją pochodnej oznacza to istnienie pochodnej prawostronnej i równość $F'_+(x) = f(x)$.

Pozostawiamy czytelnikowi przeprowadzenie analogicznego rozumowania i wykazanie lewostronnej ciągłości funkcji F w każdym punkcie x niebędącym lewym końcem przedziału J , oraz równości $F'_-(x) = f(x)$, jeśli tylko funkcja całkowana f jest lewostronnie ciągła w x . \square

Definicja 10.3.1. Funkcję ciągłą $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy pierwotną dla funkcji rzeczywistej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli jest różniczkowalna we wnętrzu J° przedziału J i zachodzi równość

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in J^\circ.$$

Przypominamy (Wniosek 8.3.6), że równość $F'(x) = f(x)$ zachodzi także w tych końcach przedziału J , w których funkcja f jest jednostronnie ciągła. Z Twierdzeń 8.3.7(i) i 10.3.1 wynika natychmiast

Wniosek 10.3.2. (i) *Funkcja pierwotna dla $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli istnieje, wyznaczona jest jednoznacznie z dokładnością do stałej – dowolne dwie funkcje pierwotne funkcji f różnią się o stałą.*

(ii) *Każda funkcja ograniczona $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła w przedziale otwartym J° posiada funkcję pierwotną. Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną dla f , to $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dla dowolnych $a, b \in J$. \square*

Ostatnia równość jest prawdziwa w ogólniejszej sytuacji (przy słabszych założeniach) i stanowi podstawy wzór dla wyznaczania wartości całek Riemanna.

Przykład 10.3.1. Wzory $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ dla $x \in \mathbb{R}$, pozwalają stwierdzić, że jedną z funkcji pierwotnych dla funkcji $\sin^2(x)$ jest

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zatem $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{4}$.

Sformułowane niżej twierdzenie bywa często nazywane (drugim) podstawowym twierdzeniem rachunku całkowego. Proponujemy odrębną nazwę – stosowaną równie szeroko, a przy tym jednoznacznie wskazującą na obu zasłużonych Autorów.

Twierdzenie 10.3.3 (Wzór całkowy Newtona–Leibniza). *Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją lokalnie całkowaną. Jeśli f ma funkcję pierwotną F , to dla dowolnych $a, b \in J$ zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (10.34)$$

Dowód. Załóżmy, że $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną dla f . Ustalmy dowolny niezdegenerowany przedział $[a, b] \subset J$ i rozważmy dowolny jego podział $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Dla każdego $i \leq n$, z Twierdzenia Lagrange’a wynika istnienie liczby $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takiej, że

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

a zatem $m_i(f)\Delta_i P \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(f)\Delta_i P$. Stąd, po zsumowaniu otrzymujemy nierówność

$$L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P) \quad \text{dla } P \in \mathcal{P}[a, b],$$

czyli $L_a^b(f) \leq F(b) - F(a) \leq U_a^b(f)$. Z całkowności funkcji f na przedziale $[a, b]$ wynika równość (10.34). \square

W obrębie rachunku całkowego różnicę $F(b) - F(a)$ oznaczamy symbolami $F|_a^b$, $F(x)|_a^b$ lub, bardziej precyzyjnie, $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$. Zatem przy odpowiednich założeniach zachodzi równość $\int_a^b f = F|_a^b$.

Z Twierdzenia 10.3.3, czyli ze wzoru Newtona–Leibniza wynikają proste, bardzo często wykorzystywane w obliczeniach wnioski.

Twierdzenie 10.3.4 (O zamianie zmiennych). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą, zaś $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ funkcją ciągłą, różnowartościową i przekształcającą dziedzinę na przedział $[a, b]$. Jeśli funkcja φ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) , a jej pochodna jest całkowalna, wówczas iloczyn $(f \circ \varphi)\varphi'$ jest funkcją całkowalną i zachodzi równość*

$$\int_a^b f = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt. \quad (10.35)$$

Dowód. Jeśli $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest jedną z funkcji pierwotnych dla f , to złożenie $F \circ \varphi$ jest funkcją pierwotną dla funkcji $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Jako iloczyn funkcji ciągłej i funkcji całkowalnej jest to funkcja całkowalna, a zatem ze wzoru Newtona–Leibniza wynikają równości

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f. \quad (10.36)$$

Jeśli funkcja φ jest rosnąca, a więc $\varphi' \geq 0$, wówczas $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$, a więc otrzymane wyżej równość jest tożsama z (10.35). Jeśli natomiast φ jest funkcją malejącą, wówczas $\varphi' \leq 0$, przy czym równości $\varphi(\alpha) = b$ i $\varphi(\beta) = a$ pociągają za sobą zmianę znaku: $\int_a^b f = -\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$. Z zależności (10.36) otrzymujemy równości

$$\int_a^b f = -\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)|\varphi'|. \quad \square$$

Uwaga 10.3.1. Zamiana zmiennych $\varphi(x) = -x$ dla $x \in [-b, -a]$, czyli podstawienie $x \mapsto -x$, prowadzi do równości

$$\int_{-b}^{-a} f(-t) dt = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.37)$$

Ogólnie, dla dowolnej funkcji całkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$, punkty $t_i = -x_{n-i}$, $i = 0, \dots, n$, tworzą podział Q przedziału $[-b, -a]$ i dla każdego i zachodzą równości

$$\begin{aligned} \max\{f(-t); t \in (t_{i-1}, t_i)\} \Delta_i Q &= \max\{f(x); x \in (x_{n-i}, x_{n-i+1})\} \Delta_{n-i+1} P, \\ \min\{f(-t); t \in (t_{i-1}, t_i)\} \Delta_i Q &= \min\{f(x); x \in (x_{n-i}, x_{n-i+1})\} \Delta_{n-i+1} P, \end{aligned}$$

a więc $U(f \circ \varphi, Q) = U(f, P)$ i $L(f \circ \varphi, Q) = L(f, P)$. Wynika stąd całkowalność złożenia, a równość (10.37) pozostaje w mocy bez założenia ciągłości funkcji całkowanej. Sygnalizujemy, że także równość (10.35) nie wymaga ciągłości funkcji f , jednak dowód w tak ogólnym przypadku jest istotnie bardziej skomplikowany.

Ćwiczenie 10.3.2. Proponujemy czytelnikowi wykazanie tezy Twierdzenia o zamianie zmiennych dla dowolnej funkcji całkowalnej f ale dla podstawienia postaci $t = \alpha x + \beta$, gdzie $\alpha \neq 0$. A zatem $\int_a^b f(\alpha x + \beta) dx = ?$.

Przykład 10.3.2 (Pole koła). Zgodnie z geometryczną interpretacją całki obliczymy teraz *pole koła* o promieniu $r > 0$, czyli zbioru

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| \leq \sqrt{r^2 - x^2}, x \in [-r, r]\}$$

jako podwojoną wartość całki $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$. Równość (10.37) daje

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2} dx + \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx,$$

co jest zgodne z obserwacją, że półkoło składa się z dwu równych *ćwiartek*. Pole każdej ćwiartki wyznaczamy korzystając z podstawienia $x = r \cos(t)$, przy czym funkcję *kosinus* ograniczamy do przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$, w którym jest funkcją malejącą. Otrzymujemy

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(t)} r \sin(t) dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt,$$

gdzie ostatnią z całek już znamy – z Przykładu 10.3.1. Jak należało oczekiwać, pole koła o promieniu r wynosi $4 \cdot \frac{\pi}{4} r^2 = \pi r^2$.

Twierdzenie 10.3.5 (Całkowanie przez części). *Niech $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi w przedziale (a, b) i takimi, że obie pochodna g' i h' są całkowalne. Wówczas*

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g'(x)h(x)dx. \quad (10.38)$$

Dowód. Funkcja $f := gh$ jest ciągła i różniczkowalna w przedziale otwartym, przy czym

$$f'(x) = g(x)h'(x) + g'(x)h(x) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Ponieważ każdy ze składników powyższej sumy jest funkcją całkowalną – jako iloczyn funkcji ciągłej i funkcji całkowalnej, spełnione są założenia Twierdzenia 10.3.3, a zatem

$$\int_a^b (gh' + g'h) = f(b) - f(a) = gh|_a^b,$$

co oznacza równość (10.38). \square

Przykład 10.3.3. Dla wyznaczenie całki $\int_1^2 \ln(x) dx$ możemy skorzystać z pozornego rozkładu na czynniki $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$, co zapisujemy w postaci

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \left[\begin{array}{l} g(x)=\ln(x), \quad g'(x)=\frac{1}{x} \\ h'(x)=1, \quad h(x)=x \end{array} \right] = [x \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Przykład 10.3.4. Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx &= \left[\begin{array}{l} g(x)=\sin(x), \quad g'(x)=\cos(x) \\ h'(x)=\sin(x), \quad h(x)=-\cos(x) \end{array} \right] = [-\sin(x) \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx, \end{aligned}$$

a zatem $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{4}$, co potwierdza uzyskany już wcześniej wynik.

Możliwość całkowania przez części pozwala na naturalne uogólnienie wzoru Newtona–Leibniza i – dokładny opis reszty we wzorze Taylora.

Twierdzenie 10.3.6 (Wzór Taylora z resztą całkową). *Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją klasy C^n . Jeśli funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna we wnętrzu J^o przedziału J , a jej pochodna $f^{(n+1)}$ jest całkowalna, to dla dowolnych $x, t \in J$ zachodzi równość*

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \int_t^x \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{n!}(x-\tau)^n d\tau. \quad (10.39)$$

Dowód. Załóżmy, że $f \in C^1(J)$, a druga pochodna f'' istnieje w przedziale J^o i jest całkowalna. Z równości (10.34) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x) - f(t) &= \int_t^x f'(\tau) d\tau = \left[\begin{array}{l} g(\tau) = f'(\tau), \quad g'(\tau) = f''(\tau) \\ h'(\tau) = 1, \quad h(\tau) = \tau - x \end{array} \right] \\ &= [f'(\tau)(\tau - x)]_{\tau=t}^{\tau=x} - \int_t^x f''(\tau)(\tau - x) d\tau = f'(t)(x-t) + \int_t^x f''(\tau)(x-\tau) d\tau \end{aligned}$$

dla dowolnych $x, t \in J$. Tym samym wykazaliśmy równość (10.39) dla $n=1$.

Niech $S \subset \mathbb{N}$ oznacza zbiór złożony z tych liczb $n \in \mathbb{N}$, dla których każda funkcja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca sformułowane w twierdzeniu założenia – nazwijmy je \mathcal{Z}_n – oznaczające klasę gładkości $f \in C^n(J)$ oraz istnienie

i całkowalność $(n+1)$ -szej pochodnej $f^{(n+1)}$, daje się przedstawić w postaci $(10.39)_n$. W ramach dowodu indukcyjnego pokazaliśmy, że $1 \in S$.

Niech teraz n będzie dowolną liczbą ze zbioru S . Aby wykazać, że także $n+1 \in S$, rozważmy dowolną funkcję $f \in C^{n+1}(J)$ spełniającą założenia \mathcal{Z}_{n+1} , a więc taką, że pochodna $f^{(n+2)}$ jest określona w J° i całkowalna. Ponieważ f spełnia także słabsze założenia \mathcal{Z}_n , dla dowolnych $x, t \in J$ zachodzi równość $(10.39)_n$. Przekształcając całkę będącą ostatnim składnikiem wzoru Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_t^x \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{n!} (x-\tau)^n d\tau &= \left[g(\tau) = f^{(n+1)}(\tau), \quad g'(\tau) = f^{(n+2)}(\tau) \right] \\ &\quad \left[h'(\tau) = \frac{(x-\tau)^n}{n!}, \quad h(\tau) = -\frac{(x-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \\ &= \left[-f^{(n+1)}(\tau) \frac{(x-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{\tau=t}^{\tau=x} + \int_t^x f^{(n+2)}(\tau) \frac{(x-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} d\tau \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} + \int_t^x \frac{f^{(n+2)}(\tau)}{(n+1)!} (x-\tau)^{n+1} d\tau, \end{aligned}$$

co oznacza, że zachodzi wzór Taylora $(10.39)_{n+1}$, a więc zbiór S zawiera także liczbę $n+1$. Z zasady indukcji wynika równość $S = \mathbb{N}$, a to kończy dowód twierdzenia. \square

Ćwiczenie 10.3.3. Korzystając z 10.29, wyprowadzić ze wzoru całkowego (10.39) poznaną wcześniej postać Lagrange’a reszty.

Uwaga 10.3.2. Pamiętamy z Przykładu 9.1.2, że postać Lagrange’a reszty we wzorze Taylora dla funkcji $\ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, nie gwarantuje zbieżności dla $x \in (-1, -\frac{1}{2})$. Dla $x = -|x| < 0$ dokładna, całkowita postać reszty $R_n(x)$ wynosi

$$(-1)^n \int_0^x \frac{(x-\tau)^n}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau = (-1)^n \int_0^{|x|} \frac{(t-|x|)^n}{(1-t)^{n+1}} dt = \int_0^{|x|} \frac{(|x|-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt,$$

gdzie zastosowaliśmy podstawienie $t = -\tau \in [0, |x|]$. Korzystając z nierówności $\frac{|x|-t}{1-t} \leq |x|$, której sprawdzenie zostawiamy czytelnikowi, otrzymujemy oszacowanie

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} \frac{|x|^n}{1-t} dt = |x|^n |\ln(1-|x|)|,$$

a zatem $\lim_n R_n(x) = 0$ dla $x \in (-1, 0]$. Faktyczna zbieżność szeregu jest jednak nieco lepsza, co pokazaliśmy we Wniosku 8.1.5.

Ćwiczenie 10.3.4. Sprawdzić, że całkowita postać reszty pozwala udowodnić zbieżność szeregu dwumianowego (9.7) do sumy $(1+x)^a$.

10.4 Interpretacje i zastosowania

Wprowadzona w poprzednich trzech podrozdziałach całka Riemanna jest pojęciem wyraźnie bardziej skomplikowanym i bardziej wymagającym od czytelnika niż pochodna. *Rachunek całkowy*, którego naukę dopiero rozпочęliśmy, stanowi podstawowe narzędzie dla wielu działów szeroko pojętej *Analizy* daleko wykraczających poza prezentowaną tu elementarną *Analizę I*.

Inaczej niż dla pochodnych, nie ma wzorów pozwalających całkować iloczyn czy iloraz funkcji. Sprawia to, że w przypadku złożenia funkcji reguła *całkowania przez podstawianie* zamienia problem obliczenia jednej całki na inny, niekoniecznie prostszy. Zanim w podrozdziale 10.6 przedstawimy zestaw sprawdzonych, praktycznych reguł obliczeniowych dotyczących szczególnych całek, zatrzymamy się na chwilę, by uzasadnić sens czekającego nas wysiłku i poszukać odpowiedzi na pytanie: do czego obliczanie całek jest potrzebne? do czego może się przydać? – zarówno w sensie praktycznym, jak i w sensie teoretycznym, w nawiązaniu do kilku wcześniej poruszanych problemów.

Zastosowania praktyczne całki – dostępne w tym momencie – nawiązują do interpretacji całki jako pola i korzystają z intuicyjnych pojęć miary w \mathbb{R}^2 (pole – por. rozdział 11) i w \mathbb{R}^3 (objętość) oraz do pojęcia długości łuku. Pojęcia te przyjmują w pełni precyzyjną postać w kolejnych częściach kursu *Analizy*, natomiast intuicje pozwalają nadać interpretację wyznaczanym wielkościom i *definiującym je wzorom*.

Definicja 10.4.1. Polem figury płaskiej $A \subset \mathbb{R}^2$ ograniczonej wykresami funkcji całkowalnych $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, takich że $f \leq g$, tzn.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazywamy liczbę $area(A) = \int_a^b (g - f)$.

Przykład 10.4.1. Wyznamy pole obszaru A zawartego pomiędzy wykresami parabol $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ dla $0 \leq x \leq 1$. Zgodnie z definicją,

$$area(A) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ćwiczenie 10.4.1. Obliczyć pole trójkąta $A \subset \mathbb{R}^2$ o podstawie wyznaczonej przez wierzchołki $(0, 0)$ i $(a, 0)$ i trzecim wierzchołku postaci (c, h) , gdzie $a, h > 0$, natomiast $c \in \mathbb{R}$ jest dowolnym parametrem. W zależności od c podać funkcje liniowe, których wykres zawiera pozostałe boki trójkąta i ogranicza obszar trójkąta z góry.

Przykład 10.4.2. Pole elipsy $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1\}$ o półosiach długości $a, b > 0$ obliczamy jako całkę

$$\text{area}(E) = \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2} dx.$$

Stosując podstawienie $x = a \cos(t), t \in [0, \pi]$, otrzymujemy

$$\text{area}(E) = 2b \int_0^\pi a \sin^2(t) dt = \pi ab.$$

Uwaga 10.4.1. Zwracamy uwagę czytelnika na fakt, że podana wyżej definicja nie wprowadza pojęć: *pole*, czy też *figura płaska*. Zamiast tego, Definicja 10.4.1 ustala i nazywa związek pomiędzy szczególnymi podzbiarami $A \subset \mathbb{R}^2$, i odpowiadającymi im całkami Riemanna. Proponowana definicja jednoznacznie zależy od położenia *mierzonego* zbioru w stosunku do układu współrzędnych w \mathbb{R}^2 . Formalna, precyzyjna definicja miary 1- i 2-wymiarowej (miary Lebesgue'a) pojawia się w rozdziale 11 i jest rozwijana i uogólniana w ramach *Analizy II-III* oraz w ramach ogólnego kursu *Teorii miary i całki*.

Definicja 10.4.2. Objętością figury przestrzennej $V \subset \mathbb{R}^3$ ograniczonej, zawartej w zbiorze $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, |y|, |z| \leq c\}$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę $\text{vol}(V) = \int_a^b \text{area}(V_x) dx$, gdzie

$$V_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in V\} \quad \text{dla } a \leq x \leq b,$$

jeśli funkcja $\text{area}(V_x), x \in [a, b]$, jest całkowalna.

Przykład 10.4.3. Objętość kuli $B(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ o promieniu $r > 0$ wyznaczamy, korzystając z faktu, że każdy ze zbiorów

$$B(r)_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\} \quad \text{dla } x \in [-r, r]$$

jest kołem o promieniu $\sqrt{r^2 - x^2}$. Wynika stąd równość

$$\text{vol}(B(r)) = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Wniosek 10.4.1 (Objętość bryły obrotowej). Dla dowolnej nieujemnej funkcji całkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ objętość figury przestrzennej

$$O(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\},$$

ograniczonej powierzchnią otrzymaną przez obrót wykresu funkcji f dookoła osi X , jest równa $\text{vol}(O(f)) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. \square

Definicja 10.4.3. Długością łuku $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ opisanego równaniem

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2; a \leq t \leq b\}, \quad (10.40)$$

gdzie funkcje $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne, a ich pochodne całkowalne, nazywamy liczbę $len(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

Przykład 10.4.4. Wyznamy długość łuku paraboli, czyli krzywej $\Gamma = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1]\}$. Łuk Γ opisują funkcje $x(t) \equiv t, y(t) = t^2$, dla $t \in [0, 1]$, a zatem

$$len(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \left[\frac{t}{2} \sqrt{1 + 4t^2} - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{1 + 4t^2} - 2t) \right]_0^1,$$

gdzie funkcję pierwotną znajdujemy korzystając z metod opisanych w podrozdziale 10.6. Otrzymujemy liczbę $len(\Gamma) = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{5}-2)}{4} \approx 1,47894\dots$ Oczekujemy, że czytelnik wyznaczy pochodną podanej funkcji i potwierdzi, że jest to funkcja pierwotna funkcji podcałkowej.

Zgodnie z Twierdzeniem 10.3.4 zamiana zmiennych postaci $t = \varphi(\tau)$, gdzie $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ przekształca przedział $[\alpha, \beta]$ na $[a, b]$, prowadzi do równości

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt &= \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\varphi(\tau))^2 + y'(\varphi(\tau))^2} |\varphi'(\tau)| d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(x \circ \varphi)'(\tau)^2 + (y \circ \varphi)'(\tau)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Wniosek 10.4.2. Długość łuku krzywej nie zależy od wyboru parametryzacji (10.40) łuku. \square

Przedstawienie kilku *teoretycznych konsekwencji* istnienia (czyli: udanej konstrukcji) całki Riemanna rozpoczynamy od pomocniczego twierdzenia, mającego charakter ćwiczenia.

Lemat 10.4.3. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzą równości

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n)} \frac{\pi}{2} \quad i \quad (10.41)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}. \quad (10.42)$$

Dowód. Ćwiczenie. Stosując całkowanie przez części wykazać zależność

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) dx \quad \text{dla } n \geq 2. \quad \square$$

Po podstawieniu $x = \frac{\pi}{2} - t$ otrzymujemy te same wartości całek funkcji $\cos^n(x)$.

Twierdzenie 10.4.4 (Wzór Wallisa). *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności*

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}, \quad (10.43)$$

przy czym oba ciągi iloczynów dążą do tej samej granicy $\frac{\pi}{2}$.

Podana tu postać wzoru Wallisa (3.5), zapisywana także w postaci (10.44), zawiera proste oszacowanie tempa zbieżności i błędu przybliżenia granicznej wartości.

Dowód. Z nierówności $\sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ wynikają analogiczne własności całek (10.41)–(10.42), a zatem

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd oszacowanie

$$\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n}, \quad (10.44)$$

a zbieżność oraz równość granic wynika z Twierdzenia o trzech ciągach. \square

Uwaga 10.4.2. Iloraz występujący w nierówności (10.44) może być zapisany w postaci

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n))^2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n)},$$

co prowadzi do równości

$$\lim_n \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (10.45)$$

będącej alternatywną formą wzoru Wallisa. Stąd już prosty krok do wyznaczenia stałej c , która pojawiła się w podrozdziale 8.3 we wzorze Stirlinga. Istotnie, korzystając z opisu $n!$ i $(2n)!$ w postaci (8.20), otrzymujemy

$$\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n} n^{2n+1} e^{\theta_n/6n}}{c^2 e^{2n}} \cdot \frac{c e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{\theta_{2n}/24n} \sqrt{2n}} = \frac{1}{2c} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}} \rightarrow \frac{1}{2c}$$

dla $n \rightarrow \infty$.

Wniosek 10.4.5. *Wartość stałej c we wzorze Stirlinga (8.20) wynosi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.* \square

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zatem liczba $\theta \in (0, 1)$, taka, że zachodzi równość

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\theta/12n}. \quad (10.46)$$

Jest to oficjalna wersja Wzoru Stirlinga.

Uwaga 10.4.3. Szukając wyjaśnienia, dlaczego akurat całka nieparzystej potęgi funkcji \sin jest liczbą wymierną, pozornie niezwiązaną z liczbą π , możemy zastosować podstawienie postaci $\cos(x) = t$, czyli $x = \arccos(t)$ dla $t \in [0, 1]$. Otrzymujemy równość

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) \sin(x) dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (10.47)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, z której skorzystamy także w kolejnym podrozdziale.

Ćwiczenie 10.4.2. Wyznaczyć całkę (10.47) korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona (1.2). Porównać uzyskane wartości.

Uwaga 10.4.4. Wzór Wallisa (10.43), jakkolwiek ważny w sensie teoretycznym, nie nadaje się w tej postaci do wyznaczania przybliżonych wartości liczby π , gdyż jego zbieżność nie różni się istotnie od zbieżności naprzemiennego szeregu Leibniza. Świadczy o tym postać logarytmiczna

$$\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

gdzie $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Do szeregu logarytmów możemy oczywiście zastosować poznany schemat przyspieszania zbieżności, co przy odrobinie cierpliwości prowadzi do wzorów (dla uproszczenia – w postaci iloczynowej)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 &= 2 \cdot \frac{2^3 \cdot 4}{1 \cdot 3^3} \cdot \frac{4^3 \cdot 6}{3 \cdot 5^3} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-2)^3 \cdot (2n)}{(2n-3) \cdot (2n-1)^3} \cdot \dots \\ &= \frac{2^3}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 6^3}{5^3 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-2) \cdot (2n)^3}{(2n-1)^3 \cdot (2n+1)} \cdot \dots, \end{aligned}$$

przy czym pierwszy z iloczynów jest ciągiem rosnącym, a drugi – malejącym. Łatwa do sprawdzenia nierówność

$$\frac{(x-1)^3(x+1)}{(x-2)x^3} < \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-2)x} : \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} \quad \text{dla } x \geq 0,$$

pozwala na wyznaczenie poprawionych ciągów postaci

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < (b_n)^2 &= \frac{2^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot (2n-2)^4 (2n)^3}{1 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot (2n-3)^4 (2n-1)^4} \cdot \frac{1}{2n+1}, \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > (c_n)^2 &= \frac{2^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot (2n-2)^4 (2n)}{1 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot (2n-3)^4 (2n-1)^3}, \end{aligned}$$

a zatem

$$c_n = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{2n-1}{2n}} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = b_n \quad (10.48)$$

lub, zapisane w nieco inny sposób,

$$c_{n+1} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} = b_n. \quad (10.49)$$

Oznacza to zmniejszenie relatywnego błędu przybliżenia do poziomu

$$\frac{b_n - c_n}{c_n} = \sqrt{\frac{4n^2}{4n^2 - 1}} - 1 \approx \frac{1}{8n^2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Czytelnik, który dotrwał do tego momentu (chodzi o tzw. *czytanie ze zrozumieniem*), zapewne zauważył zależności $b_n = \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}}$ i $c_n = \sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}$, gdzie

$$a_{2n} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n} \quad \text{i} \quad a_{2n+1} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

są kolejnymi wyrazami ciągu zapisanego we wzorze Wallisa (3.5). Czy zatem nierówności (10.48)–(10.49) nie można uzyskać w prostszy, szybszy sposób? Ależ tak, można! Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego *naprzemiennego* ciągu zbieżnego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, czyli takiego, że $\lim_n a_n = g \in \mathbb{R}$ i

$$0 < a_{2n-1} < a_{2n+1} < \dots < g < \dots < a_{2n+2} < a_{2n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

ciągi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ otrzymane ze średnich geometrycznych $b_n = \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}}$ i $c_n = \sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$, są również zbieżne do tej samej granicy g , przy czym $c_n < b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli mamy trochę szczęścia i dodatkowo zachodzą nierówności $c_n < c_{n+1}$ i $b_{n+1} < b_n$, to ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ maleje, a ciąg $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rośnie do wspólnej granicy. Zatem

$$0 < c_n < c_{n+1} < \dots < g < \dots < b_{n+1} < b_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a szukanie granicy zaczyna przypominać algorytm połowienia.

W przypadku wzoru Wallisa monotoniczność poprawionych ciągów oraz oszacowania (10.48)–(10.49) wynikają z łatwych do sprawdzenia nierówności

$$\left(\frac{b_{n-1}}{b_n} \right)^2 = \frac{(2n-1)^3(2n+1)}{(2n-2)(2n)^3} > 1, \quad \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} \right)^2 = \frac{(2n)^3(2n+2)}{(2n-1)(2n+1)^3} > 1,$$

prawdziwych dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponowne zastosowanie powyższego schematu postępowania prowadzi do kolejnych dwu ciągów

$$B_n = \sqrt{b_n c_{n+1}} = a_{2n+1} \sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} \quad \text{i} \quad C_n = \sqrt{b_n c_n} = a_{2n} \sqrt[4]{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

i kolejnego *nieco lepszego* oszacowania $C_n < \frac{\pi}{2} < B_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. I tak dalej...

10.5 Całki niewłaściwe

W bieżącym podrozdziale *nie wprowadzamy* nowych pojęć. Nie ma tu nowego, innego sposobu całkowania. Jest – nowa nazwa i częściowo nowy symbol.

Zanim przejdziemy do szczegółów, rozważmy

Przykład 10.5.1. Własność $e^{-x^2} = \lim_n (1 - \frac{x^2}{n})^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, wynikająca z Twierdzenia 4.5.2, oraz formalne podobieństwo wskazanego tu wielomianu do funkcji podcałkowej we wzorze (10.47), sugerują istnienie bardziej ściślego związku pomiędzy funkcją wykładniczą e^{-x^2} a opisaną poprzez wzór Wallisa liczbą π . Istotnie, stosując podstawienie $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ dla $x \in [0, \sqrt{n}]$ i korzystając z nierówności (4.5.3), sprowadzamy całkę do postaci

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx,$$

czyli

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sqrt{n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx, \quad (10.50)$$

przy czym możemy się spodziewać, że graniczne wartości obu wyrażeń są równe.

Łącząc całkę Riemanna ze znanym pojęciem granicy funkcji, przyjmujemy

Definicja 10.5.1. Dla dowolnej funkcji lokalnie całkownej $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dla której funkcja $F(b) = \int_a^b f(x) dx$, $b \geq a$, ma skończoną granicę w nieskończoności, liczbę

$$\int_a^\infty f := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \quad (10.51)$$

nazywamy całką niewłaściwą po przedziale nieskończonym $[a, \infty)$.

Całką niewłaściwą funkcji lokalnie całkownej $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ po przedziale $(-\infty, b]$ nazywamy liczbę

$$\int_{-\infty}^b f := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f, \quad (10.52)$$

o ile wskazana granica istnieje.

Ćwiczenie 10.5.1. Sprawdzić, że jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie całkowna i dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ istnieją obie całki niewłaściwe z f po przedziałach $(-\infty, c]$ i $[c, \infty)$, to suma

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f, \quad (10.53)$$

nie zależy od liczby $c \in \mathbb{R}$.

Wielkość opisaną wzorem (10.53), jeśli obie całki niewłaściwe istnieją, nazywamy *całką niewłaściwą* z funkcji f po \mathbb{R} .

Wracając do nierówności (10.50) udowodnimy

Twierdzenie 10.5.1 (Całka Poissona). *Całka niewłaściwa z funkcji e^{-x^2} dla $x \geq 0$ istnieje i wynosi*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (10.54)$$

Dowód. Dla dowodu istnienia całki niewłaściwej z rozważanej funkcji zauważmy, że nierówność $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, a więc $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, prowadzi do oszacowania

$$\int_0^b e^{-x^2} dx \leq \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(b) < \frac{\pi}{2}$$

dla $b \geq 0$. Tym samym całka niewłaściwa $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ istnieje jako granica ograniczonej funkcji rosnącej. Przechodząc do granicy we wzorze (10.50) otrzymujemy nierówność $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Aby udowodnić nierówność przeciwną skorzystamy ponownie z nierówności (4.24), w postaci $e^{x^2} \geq (1 + \frac{x^2}{n})^n \geq 1 + x^2$. Wynikające stąd nierówności

$$e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

dowodzą, że dla każdej funkcji wymiernej postaci $(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$ istnieje jej całka niewłaściwa, przy czym

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \quad (10.55)$$

Pozostaje wyznaczyć całki niewłaściwe

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{b\sqrt{n}} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z podstawienia $x = t\sqrt{n}$ dla $t \geq 0$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $b \geq 0$ zauważamy zależność

$$\int_0^b \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^b \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} + \int_0^b \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt,$$

po czym dla drugiej z całek stosujemy całkowanie przez części wybierając funkcje $g(t) = t$ i $h'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}$, co daje $g'(t) = 1$ i $h(t) = \frac{-1}{2n(1+t^2)^n}$. Otrzymujemy równość

$$\int_0^b \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \left[\frac{-t}{2n(1+t^2)^n} \right]_0^b + \int_0^b \frac{dt}{2n(1+t^2)^n},$$

a zatem

$$\int_0^b \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int_0^b \frac{dt}{(1+t^2)^n} + \frac{b}{2n(1+b^2)^n}.$$

W granicy dla $b \rightarrow \infty$ ostatni składnik znika, a znaleziona zależność pomiędzy całkami niewłaściwymi $I_n := \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ przybiera postać $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a więc

$$I_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} I_1, \quad \text{gdzie } I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

W połączeniu z (10.55) wynika stąd oszacowanie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq I_{n+1} \sqrt{n+1} = \frac{(2n)! \sqrt{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

gdzie granicę dla $n \rightarrow \infty$ wyznaczamy korzystając ze wzoru Wallisa (10.45). Otrzymana nierówność kończy dowód. \square

Uwaga 10.5.1. Funkcja $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, pełni ważną rolę w obrębie Rachunku Prawdopodobieństwa jako *gęstość standardowego rozkładu normalnego*, co w szczególności oznacza równość

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Zachęcamy czytelnika, by powyższą równość wyprowadził z (10.54).

Duże znaczenie praktyczne ma korzystające z pojęcia całki niewłaściwej kolejne *kryterium zbieżności szeregów*.

Twierdzenie 10.5.2 (Kryterium całkowe zbieżności). *Niech $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną nieujemną funkcją nierosnącą. Szereg liczbowy $(\sum f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(x) dx$.*

(i) *Jeśli szereg jest zbieżny, to dla $n \in \mathbb{N}$ nierówność*

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \quad (10.56)$$

stanowi oszacowanie n -tej reszty szeregu.

(ii) *Jeśli szereg jest rozbieżny, to ciąg różnic*

$$d_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \geq f(n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

jest nierosnący i zbieżny do granicy $\lim_n d_n \in [0, f(1)]$.

Dowód. Z Twierdzenia 10.12 i monotoniczności funkcji f wynikają nierówności

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}, \quad (10.57)$$

a więc także $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx$ dla $k > 1$. Dla dowolnych liczb naturalnych $m \geq n > 1$, po zsumowaniu składników w zakresie $n \leq k \leq m$, otrzymujemy zależność

$$\int_n^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^m f(k) \leq \int_{n-1}^m f(x)dx, \quad (10.58)$$

z której bezpośrednio wynikają nierówności $d_{m+1} \geq f(m+1) \geq 0$.

Jeśli całka niewłaściwa z f istnieje, to z nierówności (10.58) wynika ograniczoność, a więc także zbieżność badanego szeregu. Z tej samej nierówności wynika także ograniczoność funkcji niemalejącej $F(b) = \int_1^b f$ dla $b \geq 1$, jeśli tylko szereg $(\sum f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Nierówność stanowiąca własność (i) otrzymujemy z (10.58) przez przejście graniczne dla $m \rightarrow \infty$, a jeśli odrzucimy założenie zbieżności szeregu, to z (10.57) otrzymujemy także

$$d_{n+1} = d_n + \left(f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right) \leq d_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a to oznacza monotoniczność ciągu różnic $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograniczonego z góry przez $d_1 = f(1)$. \square

Przykład 10.5.2. Rozbieżność szeregu harmonicznego $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zgodna z brakiem skończonej granicy

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty.$$

Z Twierdzenia 10.5.2(ii) wynika także, że dla pewnej liczby $\gamma \in [0, 1]$ zachodzi przybliżona równość

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n) + \gamma, \quad (10.59)$$

co potwierdza i precyzuje zauważone wcześniej wolne tempo wzrostu szeregu rozbieżnego (do ∞). Liczba $\gamma = 0,57721566490\dots$ o powyższej własności nosi nazwę *stałej Eulera–Mascheroniego*. Zbieżność ciągu malejącego

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \longrightarrow \gamma \quad \text{dla } n \rightarrow \infty$$

również trudno zaliczyć do szybkich (ćwiczenie - sprawdzić dokładność przybliżenia $\gamma_{100000} \approx \gamma$). Dokładniejsza analiza różnic

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot n^k} \quad \text{dla } n > 1,$$

prowadzi do nierówności $0 < \gamma_{n-1} - \gamma_n < \frac{1}{2n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{2n(n-1)}$, a zatem

$$0 < \gamma_n - \gamma = \sum_{m \geq n} (\gamma_m - \gamma_{m+1}) < \sum_{m \geq n} \frac{1}{2m(m+1)} = \frac{1}{2n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wykażemy, że poprawiony ciąg o wyrazach

$$\tilde{\gamma}_n = \gamma_n - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \ln(n) < \gamma \quad (10.60)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ jest rosnący i szybciej zbieżny do stałej γ . Istotnie, nierówność

$$\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

otrzymujemy, jeśli w słabszej niż (8.16) nierówności $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < \frac{2x}{1-x^2}$ podstawimy $x = \frac{1}{2n+1}$. Liczba γ jest zatem sumą szeregu $\gamma = \tilde{\gamma}_1 + \sum_{n \geq 1} (\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n)$, którego szybka zbieżność wynika z nierówności (8.16) i oszacowania

$$\begin{aligned} 0 < \gamma - \gamma_m &= \sum_{n \geq m} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \leq \sum_{n \geq m} \frac{1}{2n(n+1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n \geq m} \left(\frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) < \frac{1}{2m(2m+1)}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie: porównać (numerycznie) zbieżność ciągów $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wykorzystane w Definicji 10.5.1 przejście graniczne można wykorzystać w przypadku funkcji określonych ale *nieograniczonych* na skończonym przedziale otwartym – przynajmniej z jednej strony, por. Twierdzenie 10.2.4.

Definicja 10.5.2. Dla dowolnej funkcji lokalnie całkownej $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dla której funkcja $F(\alpha) = \int_{\alpha}^b f(x) dx$, $\alpha \geq a$, ma granicę prawostronną w a , liczbę

$$\int_a^b f := \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f \quad (10.61)$$

nazywamy całką niewłaściwą II rodzaju po przedziale (skończonym) $[a, b]$.

Całką niewłaściwą II rodzaju *funkcji lokalnie całkowalnej* $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ po przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f := \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f, \quad (10.62)$$

o ile wskazana granica istnieje.

Ćwiczenie 10.5.2. Sprawdzić, że jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie całkowalna i dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ istnieją obie całki niewłaściwe z f po przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$, to suma

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f, \quad (10.63)$$

nie zależy od liczby $c \in (a, b)$.

Wielkość opisaną wzorem (10.63), jeśli obie całki niewłaściwe istnieją, nazywamy *całką niewłaściwą II rodzaju* z funkcji f .

Przyjęta powszechnie konwencja dopuszcza równoważny termin *całka jest zbieżna* na określenie sytuacji, gdy wskazana całka niewłaściwa \int_a^b jest określona (czyli – istnieje).

Uwaga 10.5.2. Przedstawiona tu definicja zawiera potencjalną niejednoznaczność: całki niewłaściwe II stopnia korzystają z *tego samego oznaczenia* $\int_a^b f$ co (zwykle) całki Riemanna. Jest to dopuszczalne (i poprawne), gdyż zgodnie z Twierdzeniem 10.2.4 całka niewłaściwa II rodzaju stanowi uogólnienie całki Riemanna, a w przypadku funkcji całkowalnej każdy ze wzorów (10.61)–(10.63) prowadzi do tej samej wartości. Problem ten nie pojawiał się przy wcześniejszych całkach, których ewentualna *niewłaściwość* (I rodzaju) wynikała z użycia nieskończonej granicy całkowania.

Przykład 10.5.3. W przypadku szeregu zbieżnego $(\sum \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ oszacowanie (10.56) przybiera postać

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n},$$

wynikającą także z nierówności $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ dla $k > 1$. Suma szeregu jest w tym przypadku całką niewłaściwą II rodzaju $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$. Istotnie, ze wzoru (8.6) wynika rozwinięcie w szereg

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad \text{dla } x \in (0, 1),$$

przy czym funkcja *podcałkowa* ma ciągle rozszerzenie na przedział $[-1, 1)$. Z Twierdzenia 8.1.4 wynika, że suma szeregu $F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ dla $|x| \leq 1$ jest funkcją pierwotną, a zatem

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} (F(b) - F(0)) = F(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Hipoteza, że badana suma szeregu jest równa $\frac{\pi^2}{6}$, została udowodniona przez L. Eulera w 1735 r – ok. 90 lat po sformułowaniu problemu. Autorowi nie jest znany na tyle elementarny dowód, by można go przedstawić w ramach kursu *Analizy I*. Dowód korzystający z całek w \mathbb{R}^2 czytelnik znajdzie w [3].

10.6 Metody wyznaczania funkcji pierwotnych

Zgodnie z Wnioskiem 10.3.2, dla dowolnej funkcji ciągłej $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ o niepustym wnętrzu J° i dowolnego punktu $c \in J$ funkcja

$$F(x) = \int_c^x f \quad \text{dla } x \in J$$

jest funkcją pierwotną, przy czym wszystkie funkcje pierwotne ustalonej funkcji f różnią się o stałą. Wzór całkowy Newtona–Leibniza (10.34) pozwala wyznaczyć całkę Riemanna $\int_a^b f$ po dowolnym przedziale $(a, b) \subset J$, jeśli tylko znana jest przynajmniej jedna funkcja pierwotna. Dotyczy to także wprowadzonych w poprzednim podrozdziale całek niewłaściwych. Przyjmujemy

Definicja 10.6.1. Całką nieoznaczoną dowolnej funkcji ciągłej f określonej na przedziale (niezdegenerowanym) $J \subset \mathbb{R}$ nazywamy rodzinę $\int f(x) dx$ wszystkich funkcji pierwotnych na J .

Jeśli $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną spośród funkcji pierwotnych dla f , to równość zbiorów $\int f(x) dx = \{F + C; C \in \mathbb{R}\}$, zapisuje się tradycyjnie w uproszczony sposób

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{dla } x \in J, \quad (10.64)$$

opisujący zależną od parametru $C \in \mathbb{R}$ ogólną postać funkcji pierwotnej.

Uwaga 10.6.1. Każda funkcja pierwotna dla $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest reprezentantem całki nieoznaczonej $\int f(x) dx$. Korzystając z terminologii wprowadzonej w ramach kursu Podstaw Logiki i Teorii Mnogości, całkę nieoznaczoną możemy postrzegać (czyli – interpretować) jako klasę abstrakcji relacji, w której

dwie funkcje różniczkowalne uznajemy za równoważne, gdy mają tę samą pochodną. Występujący we wzorze (10.64) napis „dla $x \in J$ ” ustala wspólną nazwę zmiennej i zakres jej zmienności dla wszystkich funkcji reprezentujących daną całkę nieoznaczoną.

W odróżnieniu od funkcji pierwotnych całka nieoznaczona $\int f(x) dx$ *nie jest* funkcją – jest zbiorem funkcji. Z tego powodu nie można wyznaczyć jej wartości np. w $x = 3$, a napis „ $\int f(3) d3$ ” nie ma sensu. Z nieco innego powodu wyrażenie $F(3) + C$ stojące po prawej stronie równości (10.64) nie ma wartości, dopóki nie ustalimy stałej C i nie wyróżnimy w ten sposób jednej, konkretnej funkcji pierwotnej.

Ćwiczenie 10.6.1. Sprawdzić, że całka nieoznaczona wielomianu stopnia n jest (pewną) rodziną wielomianów stopnia $n + 1$.

Najprostsza i zarazem ogólna reguła wyznaczania całek nieoznaczonych dotyczy funkcji rozwijalnych w szereg i wynika z Twierdzenia 8.1.4 o pochodnej szeregu potęgowego.

Twierdzenie 10.6.1 (Całka szeregu potęgowego). *Dla dowolnego szeregu potęgowego $(\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$ o promieniu zbieżności $\rho > 0$ całka nieoznaczona z funkcji*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dla } x \in (-\rho, \rho)$$

jest reprezentowana przez sumy szeregów potęgowych

$$\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C$$

o takim samym promieniu zbieżności. □

Przykład 10.6.1. Całka nieoznaczona z funkcji $\frac{\sin(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, wynosi

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Całkowana funkcja stanowi przykład funkcji elementarnej, dla której (żadna) funkcja pierwotna nie jest funkcją elementarną. Wyznaczyć przybliżoną wartość całki oznaczonej na przedziale $[0, 10]$ – jako sumę szeregu naprzemiennego

$$\int_0^{10} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Ile potrzeba składników, aby uzyskać błąd przybliżenia mniejszy niż 10^{-12} ?

W ramach przyjętej wyżej konwencji, z własności pochodnych wynika

Twierdzenie 10.6.2 (Własności całek nieoznaczonych). *Niech f i g będą dowolnymi funkcjami ciągłymi na tym samym przedziale J .*

(i) *Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość zbiorów*

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx. \quad (10.65)$$

(ii) *Jeśli F jest funkcją pierwotną dla f , a G – funkcją pierwotną dla g , to*

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx. \quad (10.66)$$

(iii) *Jeśli funkcja $\varphi: I \rightarrow J$ określona na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną, a F jest funkcją pierwotną dla f , to*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (10.67)$$

Dowód. Ćwiczenie. Równość (10.65) oznacza, że do wyznaczenia funkcji pierwotnej dla $af + bg$ wystarczy znajomość dowolnych funkcji pierwotnych dla f i dla g . Chcemy również zwrócić uwagę czytelnika na to, że po prawej stronie równości (10.66) opisującej całkowanie przez części występuje dwa razy *ta sama* funkcja pierwotna, a ewentualna próba zamiany F na $F + C$ w jednym z miejsc prowadzi do błędnego wyniku. \square

Przykład 10.6.2. Wzór na pochodną logarytmu prowadzi do równości

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \text{dla } x \neq 0,$$

opisującej w istocie dwie całki nieoznaczone – jedną w przedziale $(0, \infty)$ i drugą w przedziale $(-\infty, 0)$. Stąd

Wniosek 10.6.3. *Niech f będzie dowolną różniczkowalną funkcją rzeczywistą.*

(i) *Całka nieoznaczona z ilorazu f'/f jest równa*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad (10.68)$$

w każdym przedziale, w którym $f \neq 0$ i pochodna f' jest ciągła.

(ii) *Całkę nieoznaczoną z funkcji $f' \cdot f^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, opisuje wzór*

$$\int f'(x)f(x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} + C \quad (10.69)$$

w każdym przedziale, w którym potęga f^α jest określona, a pochodna f' ciągła. \square

Wzór (10.68) wyjaśnia, dlaczego funkcja logarytmiczna pojawia się relatywnie często we wzorach całkowych.

Przykład 10.6.3. Równości

$$\int \operatorname{ctg}(x) dx = \ln |\sin(x)| + C \quad \text{ i } \quad \int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C$$

zachodzą odpowiednio: w każdym przedziale postaci $(k\pi, (k+1)\pi)$ i w każdym przedziale postaci $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 10.6.4. Korzystając z całkowania przez części (10.66), otrzymujemy

$$\int \operatorname{arc\,tg}(x) dx = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

oraz, tym razem bez funkcji logarytmicznej,

$$\int \operatorname{arc\,sin}(x) dx = x \operatorname{arc\,sin}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \operatorname{arc\,sin}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

dla $x \in [-1, 1]$.

Uwaga 10.6.2. Porównanie wzorów (10.64) i (10.67) precyzuje sposób dokonywania w całce nieoznaczonej *zamiany zmiennych*. Formalne podstawienie i zastąpienie zmiennej $x \in J$ w równości (10.64) przez $\varphi(t)$ dla $t \in I$, prowadzi do zależności

$$\int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C,$$

zgodnej z (10.67), jeśli przyjąć

$$d\varphi(t) = \varphi'(t)dt. \tag{10.70}$$

Jest to nieco już historyczne pojęcie *różniczki funkcji* φ , którego pierwowzorem była reguła opisująca *nieskończenie małą* zmianę funkcji w zależności od *nieskończenie małej* zmiany argumentu. Wbrew pozorom, pojęcie to ma realny matematyczny sens i znaczenie – zwłaszcza w odniesieniu do analizy w przestrzeniach \mathbb{R}^n wyższego wymiaru i, ogólniej, *Analizy na rozmaitościach*.

Podamy teraz podstawowe reguły całkowania, w których wyniku funkcje pierwotne możemy w pewnych przypadkach opisać – w sposób dowolnie skomplikowany, ale jednak – jako funkcje elementarne. Dotyczy to w szczególności funkcji wymiernych. W rachunku całkowym jest to jednak raczej wyjątek niż reguła.

Przykład 10.6.5. Dla wyznaczenia całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

stosujemy podstawienie $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, dla którego $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$. Stąd

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}(t^2 + 1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(t) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Otrzymany wzór możemy wykorzystać dla wyznaczenia całki z funkcji $\frac{1}{x^3+1}$ dla $x \neq -1$. Rozkład mianownika na czynniki $(x+1)(x^2-x+1)$ pozwala na przedstawienie całkowanej funkcji w postaci

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1},$$

gdzie nieznane parametry $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ i $c = \frac{1}{3}$ znajdujemy porównując współczynniki wielomianów $(ax+b)(x+1) + c(x^2-x+1) \equiv 1$. Dodatkowe przekształcenie licznika $ax+b$ do postaci

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}(2x-1) + \frac{1}{2},$$

gdzie wyróżniony czynnik jest pochodną mianownika, pozwala wreszcie przejść do całki nieoznaczonej

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= -\frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Ostatni ze wzorów pozwala na wyznaczenie np. całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \ln\left(\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Ćwiczenie 10.6.2. Korzystając z rozkładu na czynniki stopnia 2 wielomianu

$$x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2,$$

wyznaczyć całki nieoznaczone $\int \frac{dx}{x^4+1}$ i $\int \frac{x dx}{x^4+1}$. Sprawdzić istnienie i obliczyć całki niewłaściwe $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ i $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^4+1}$.

Precyzyjny opis metody całkowania naszkicowanej w Przykładzie 10.6.5 i polegającej na *rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste* wymaga rozszerzonej wiedzy z elementarnej *Algebry* – w zakresie algebry liniowej i teorii podzielności wielomianów – i opiera się na podanych niżej (bez dowodu) dwu twierdzeniach.

Twierdzenie 10.6.4 (Rozkład wielomianu na czynniki). *Dla każdego wielomianu $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ stopnia $n > 0$, a więc takiego, że $a_n \neq 0$, istnieje rozkład na czynniki postaci*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{n_1} \dots (x-x_k)^{n_k} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{m_l}, \quad (10.71)$$

w którym liczby $x_i \in \mathbb{R}, i \leq k$, są różnymi pierwiastkami wielomianu Q , natomiast czynniki stopnia 2 postaci $x^2+p_jx+q_j, j \leq l$, są różne i nie mają pierwiastków rzeczywistych, przy czym krotności $n_i, i \leq k$, oraz $m_j, j \leq l$, są liczbami naturalnymi. \square

Rozkład (10.71) jest jednoznaczny – z dokładnością do kolejności tworzących go czynników. Dopuszczalne w rozkładzie na czynniki przypadki $k = 0$ lub $l = 0$ ogranicza warunek równości stopni, tzn. $n = n_1 + \dots + n_k + 2(m_1 + \dots + m_l)$.

Twierdzenie 10.6.5 (Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste). *Niech $Q(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o rozkładzie (10.71). Dla dowolnego wielomianu $P(x)$ stopnia $\deg(P) < n$ istnieją wielomiany $R_i(x)$ stopnia $\deg(R_i) < n_i$ dla $i \leq k$ oraz $S_j(x)$ stopnia $\deg(S_j) < 2m_j$ dla $j \leq l$, takie że*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{R_i(x)}{(x-x_i)^{n_i}} + \sum_{j=1}^l \frac{S_j(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}} \quad \text{dla } x \notin \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Ponadto, dla każdego $i \leq k$ istnieją współczynniki $b_{ir} \in \mathbb{R}, r \leq n_i$, takie że

$$\frac{R_i(x)}{(x-x_i)^{n_i}} = \frac{b_{i1}}{x-x_i} + \frac{b_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{b_{in_i}}{(x-x_i)^{n_i}},$$

dla $x \neq x_i$, a dla każdego $j \leq l$ istnieją współczynniki $c_{js}, d_{js} \in \mathbb{R}, s \leq m_j$, takie że

$$\frac{S_j(x)}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}} = \frac{c_{j1}(2x + p_j) + d_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{c_{jm_j}(2x + p_j) + d_{jm_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}}.$$

dla $x \in \mathbb{R}$. □

Wniosek 10.6.6. *Całka nieoznaczona z dowolnej funkcji wymiernej jest reprezentowana przez funkcje elementarne będące sumami wielomianów, funkcji wymiernych, oraz złożen funkcji \ln z funkcjami wymiernymi i funkcji \arctg z funkcjami liniowymi.*

Dowód. Korzystając z algorytmu dzielenia wielomianów (z resztą), każdą funkcję wymierną można sprowadzić do postaci $W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie W, P i Q są wielomianami, przy czym $\deg(P) < \deg(Q)$, co obejmuje także przypadek, gdy $\deg(Q) = 0$ i $P = 0$. Całka z wielomianu $W(x)$ jest wielomianem, a nietrywialna reszta w postaci ilorazu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ spełnia założenia Twierdzenia 10.6.5. Całkując otrzymane w tezie twierdzenia *ułamki proste*, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x - x_i)^r} = \begin{cases} \ln|x - x_i| + C & \text{dla } r = 1 \\ -\frac{1/(r-1)}{(x-x_i)^{r-1}} + C & \text{jeśli } r > 1 \end{cases}$$

dla $i \leq k$, oraz

$$\int \frac{2x + p_j}{(x^2 + p_jx + q_j)^s} dx = \begin{cases} \ln(x^2 + p_jx + q_j) + C & \text{dla } s = 1 \\ -\frac{1/(s-1)}{(x^2 + p_jx + q_j)^{s-1}} + C & \text{jeśli } s > 1 \end{cases}$$

dla $j \leq l$. Do wyznaczenia pozostają jeszcze całki postaci $I_s = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^s}$ dla $s \geq 1$, gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Z oczywistej tożsamości

$$x^2 + px + q = \frac{1}{4}((2x + p)^2 + |\Delta|),$$

wynika zależność

$$I_s = \frac{1}{4} \int \frac{(2x + p)^2}{(x^2 + px + q)^{s+1}} dx + \frac{|\Delta|}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{s+1}} \quad (10.72)$$

dla $s > 0$. Wzór (10.66) na całkowanie przez części, w którym

$$f(x) = \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^{s+1}}, \quad F(x) = \frac{-1/s}{(x^2 + px + q)^s} \quad \text{ i } \quad G(x) = 2x + p,$$

pozwala przekształcić pierwszą z całek do postaci

$$\int \frac{(2x + p)^2}{(x^2 + px + q)^{s+1}} dx = -\frac{2x + p}{s(x^2 + px + q)^s} + \frac{2}{s} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^s},$$

co w połączeniu z (10.72) daje

$$I_s = -\frac{2x+p}{4s(x^2+px+q)^s} + \frac{1}{2s}I_s + \frac{|\Delta|}{4}I_{s+1}.$$

Otrzymany w ten sposób wzór rekurencyjny

$$I_{s+1} = \frac{4s-2}{s|\Delta|}I_s + \frac{2x+p}{s|\Delta|(x^2+px+q)^s} \quad \text{dla } s > 0 \quad (10.73)$$

redukuje problem do wyznaczenia całki

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + C,$$

gdzie korzystamy z podstawienia $x + \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t$ – jak w Przykładzie 10.6.5. \square

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, całkę nieoznaczoną $\int f(x) dx$ można wyrazić poprzez funkcje elementarne, jeśli istnieje podstawienie $x = \varphi(t)$ sprowadzające funkcję podcałkową (czyli – $(f \circ \varphi)\varphi'$) do postaci wymiernej. Z tej drogi korzysta wiele klasycznych metod ułatwiających całkowanie.

Przykład 10.6.6. Dla wyznaczenia całki z funkcji $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$, dla $x > 0$, możemy skorzystać z podstawienia $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. Dokończenie obliczeń dla całki

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} dx = 6 \int \frac{t^7+t^5}{t^3+1} dt$$

pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Poprawność wykonanych obliczeń możemy sprawdzić różniczkując uzyskaną funkcję lub – korzystając z Maximy bądź Maple.

Przykład 10.6.7. Dla wyznaczenia całki z funkcji postaci $f(\sin(x), \cos(x))$, której wartości zależą od dowolnych funkcji trygonometrycznych zmiennej $x \in (-\pi, \pi)$ (a nie – bezpośrednio od x), możemy skorzystać z tożsamości

$$\sin(x) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})^2 + \sin(\frac{x}{2})^2} = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}(\frac{x}{2})^2} \quad \text{i} \quad \cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(\frac{x}{2})^2}{1 + \operatorname{tg}(\frac{x}{2})^2}$$

i podstawienia $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, czyli $x = 2 \arctg(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy

$$\int f(\sin(x), \cos(x)) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

W ogólności, całki z funkcji niewymiernych nie dają się wyrazić poprzez funkcje elementarne, jeśli niewymierność zawiera pierwiastki z wielomianów stopnia wyższego niż 2 lub same pierwiastki są stopnia większego niż 2. Jeśli funkcja całkowana spełnia podane tu ograniczenia, jest „szansa na sukces”.

Przykład 10.6.8. Podstawienie $x = a \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pozwala sprowadzić całkę z dowolnej funkcji $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, $a > 0$, $|x| \leq a$, do postaci

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = a \int f(a \sin(t), a \cos(t)) \cos(t) dt.$$

Metoda ta obejmuje także przypadek, gdy pod pierwiastkiem występuje wielomian $ax^2 + bx + c$, w którym $a < 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Przykład 10.6.9 (Podstawienie Eulera). Dla wyznaczenia całki z funkcji zawierającej niewymierność postaci $\sqrt{x^2 + px + q}$ możemy zastosować podstawienie

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + t, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{t^2 - q}{p - 2t}. \quad (10.74)$$

Otrzymujemy uproszczoną postać całki nieoznaczonej

$$\int f(x, \sqrt{x^2 + px + q}) dx = 2 \int f\left(\frac{t^2 - q}{p - 2t}, \frac{t^2 - q}{p - 2t} + t\right) \frac{t^2 + pt - q}{(p - 2t)^2} dt.$$

Zwracamy uwagę czytelnika, że podstawienie (10.74) nakłada istotne ograniczenie na zakres zmienności (czyli dziedzinę) parametru t . Istotnie, jeśli $\Delta = p^2 - 4q < 0$, zmienna x może przybierać dowolne wartości rzeczywiste, natomiast warunek $0 < x + t = -\frac{t^2 - pt + q}{p - 2t}$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $p - 2t < 0$. Oznacza to ograniczenie $t \in (\frac{p}{2}, \infty)$, co odpowiada granicom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + px + q} - x) = \frac{p}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + px + q} - x) = \infty.$$

Znalezienie dziedzin dla zmiennych x i t w przypadku, gdy $\Delta \geq 0$, pozostawiamy czytelnikowi.

W szczególności, dla $a \neq 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} &= \int \frac{2t}{t^2 + a} \frac{-(t^2 + a)}{2t^2} dt = - \int \frac{dt}{t} = - \ln |\sqrt{x^2 + a} - x| + C \\ &= \ln \frac{1}{|\sqrt{x^2 + a} - x|} + C = \ln |\sqrt{x^2 + a} + x| + C_1, \end{aligned}$$

co można uważać za uzupełnienie wzoru $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$.

Czytelników zainteresowanych rozwojem swych umiejętności w konkurencji *całkowanie nieoznaczone* zachęcamy do uważnej lektury dowolnego poradnika dla inżynierów, a zwłaszcza [1], gdzie podanych jest wiele interesujących przykładów i metod.

Rozdział 11

Miara i narzędzia do mierzenia

Odległość pomiędzy punktami a, b prostej \mathbb{R} i odpowiadająca jej *długość* $|b - a|$ przedziału $[a, b]$ (lub $[b, a]$) jest punktem wyjścia do wprowadzenia pojęcia *miary*, przypisującej wartości liczbowe zbiorom – jak sugeruje nazwa – mierzalnym, przy czym nie ma powodu, by zakładać, że wszystkie podzbiory \mathbb{R} okażą się mierzalne. Ponieważ naturalną własnością prostej \mathbb{R} jest jej nieskończona długość (miara), w obrębie teorii miary wygodnie jest dołączyć wielkość $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ do zbioru możliwych wartości miary. W obrębie prostej rozszerzonej $\overline{\mathbb{R}}$ korzystamy z rozszerzonej relacji porządku i rozszerzonych przedziałów nieskończonych

$$(a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; x > a\}, \quad [a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; x \geq a\}, \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}.$$

Wprawdzie analogiczne pojęcia mają sens także dla wielkości $-\infty$, nie będziemy jednak z nich korzystać, oczekując, że wyniki *pomiarów* będą liczbami (wielkościami) nieujemnymi.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami dotyczącymi granic nieskończonych, wielkość $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ jest wspólną granicą nieograniczonych ciągów rosnących, a zatem także sumą szeregów rozbieżnych o wyrazach nieujemnych.

Definicja 11.0.1. *Nieujemną rozszerzoną funkcję rzeczywistą $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ określoną na dowolnej rodzinie zbiorów \mathcal{A} nazywamy*

(i) *monotoniczną, jeśli $\mu(A) \leq \mu(B)$ dla zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$ takich, że $A \subset B$;*

(ii) *przeliczalnie addytywną lub σ -addytywną, jeśli zachodzi równość*

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k), \quad (11.1)$$

dla dowolnej przeliczalnej rodziny wzajemnie rozłącznych zbiorów $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, takich że $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$;

(iii) przeliczalnie subaddytywną lub σ –subaddytywną, jeśli spełnia warunek

$$\mu(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k), \quad (11.2)$$

dla dowolnej przeliczalnej rodziny zbiorów $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ w \mathcal{A} i zbioru $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Funkcja μ spełniająca warunek podany w punkcie (ii) lub (iii), ograniczony do skończonych rodzin zbiorów, jest odpowiednio (skończenie) addytywna lub subaddytywna.

Od miary będziemy wymagać, by miała podane wyżej własności. Chcemy także, by była określona na dostatecznie dużej rodzinie podzbiorów ustalonej przestrzeni – to będą nasze zbiory mierzalne – na tyle bogatej, by klasyczne skończone lub przeliczalne operacje teorii mnogości nie prowadziły do utraty mierzalności.

11.1 Zbiory borelowskie i σ –ciała

W ramach kursu *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości* wprowadza się pojęcie σ –ciała. Przypominamy

Definicja 11.1.1. Rodzinę \mathcal{A} podzbiorów zbioru X nazywamy σ –ciałem, dokł. σ –ciałem w X , jeśli spełnia warunki

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
- (ii) $X \setminus A \in \mathcal{A}$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$, oraz
- (iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ dla dowolnej przeliczalnej rodziny $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów należących do \mathcal{A} .

Własności (ii)–(iii) charakteryzujące σ –ciała oznaczają, że rodzina \mathcal{A} jest zamknięta ze względu na operacje dopełnienia oraz przeliczalne sumy zbiorów.

Uwaga 11.1.1. Ze względu na warunek (ii) σ –ciało \mathcal{A} jest pojęciem *relatywnym* i zależy od zbioru X nazywanego czasem przestrzenią lub – wraz z \mathcal{A} – *przestrzenią mierzalną*. Mówiąc o σ –ciele \mathcal{A} , nie musimy jednak wskazywać jawnie przestrzeni $X = \bigcup \mathcal{A}$, jednoznacznie wyznaczonej przez \mathcal{A} .

Ćwiczenie 11.1.1. Zamiast warunku (i) w definicji σ -ciała wystarczy założyć, że rodzina \mathcal{A} jest niepusta. Sprawdzić dalsze własności:

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}, \quad \text{oraz} \quad (11.3)$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{dla dowolnych } A_n, n \in \mathbb{N}. \quad (11.4)$$

Co w przypadku skończonych rodzin?

Definicja 11.1.2. Dla dowolnej rodziny podzbiorów \mathcal{C} zbioru X , najmniejsze σ -ciało w X zawierające \mathcal{C} nazywamy σ -ciałem generowanym przez \mathcal{C} i oznaczamy przez $\sigma(\mathcal{C})$.

Definicja 11.1.3. Rodziną zbiorów borelowskich w \mathbb{R} nazywamy σ -ciało

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{(a, b) \subset \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}\} \quad (11.5)$$

generowane przez przedziały otwarte w \mathbb{R} .

Rodziną zbiorów borelowskich w \mathbb{R}^2 nazywamy najmniejsze σ -ciało

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \sigma\{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2; a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \quad (11.6)$$

zawierające rodzinę wszystkich 2-wymiarowych przedziałów w \mathbb{R}^2 .

Poprawność powyższych definicji wynika z faktu, że przekrój dowolnej rodziny σ -ciał w tej samej przestrzeni jest również σ -ciałem.

Z Twierdzenia 7.1.4 wynika natychmiast

Wniosek 11.1.1. Wszystkie zbiory otwarte w \mathbb{R} , wszystkie zbiory domknięte oraz zbiory typu F_σ i typu G_δ należą do $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ – są zbiorami borelowskimi. \square

Uwaga 11.1.2. Pojęcie zbiorów borelowskich w \mathbb{R} obejmuje wszystkie te podzbiory prostej, które można opisać (skonstruować) za pomocą przeliczalnie wielu operacji teorio-mnogościowych – sumy, różnicy i przekroju zbiorów – zastosowanych do przeliczalnej rodziny odcinków. W Definicji 11.1.3 wyróżnia się w niejawnym sposób *wszystkie* takie zbiory – od razu. Dla sprawdzenia, że konkretny zbiór jest borelowski, wystarczy wskazać specyficzny dla niego ciąg operacji.

Definicja (rodziny σ -ciała) zbiorów borelowskich rozszerza się w naturalny sposób na podzbiory przestrzeni euklidesowych \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 11.1.2. Sprawdzić, że σ -ciało $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ jest również generowane przez każdą z rodzin przedziałów:

- (i) domkniętych i ograniczonych,

- (ii) otwartych postaci (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$,
- (iii) otwartych o końcach wymiernych.
- (iv) domknięto-otwartych postaci $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 11.1.3. Sformułować i wykazać analogiczne własności σ –ciała $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Rozstrzygnąć, czy dowolne koło (otwarte lub domknięte) w \mathbb{R}^2 jest zbiorem borelowskim.

Właściwa σ –ciałom *zamkniętość* ze względu na podstawowe operacje teorio-mnogościowe rozszerza się, w naturalny sposób, na produkt kartezjański zbiorów.

Twierdzenie 11.1.2 (O produkcie zbiorów borelowskich). *Dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}$ produkt $A \times B$ jest zbiorem borelowskim w \mathbb{R}^2 .*

Dowód. Ustalmy dowolny niepusty przedział otwarty $(c, d) \subset \mathbb{R}$. Wykażemy najpierw, że rodzina zbiorów

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}; A \times (c, d) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}$$

zawiera wszystkie zbiory borelowskie na prostej. Ponieważ z definicji $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ wynika, że \mathcal{A} zawiera wszystkie przedziały otwarte, wystarczy zauważyć, że \mathcal{A} jest σ –ciałem. Sprawdzając kolejne warunki wymienione w Definicji 11.1.1, stwierdzamy:

- (i) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$, skoro $\emptyset \times (c, d) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, oraz

$$\mathbb{R} \times (c, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (c, d) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2};$$

- (ii) jeśli $A \in \mathcal{A}$, to $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$, gdyż z (11.3) wynika

$$(\mathbb{R} \setminus A) \times (c, d) = (\mathbb{R} \times (c, d)) \setminus (A \times (c, d)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2};$$

- (iii) jeśli $A_n \in \mathcal{A}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times (c, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times (c, d)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

Jako σ –ciało zawierające przedziały otwarte, rodzina \mathcal{A} zawiera najmniejsze σ –ciało o tej własności – czyli wszystkie zbiory borelowskie.

W drugiej części dowodu, dla dowolnego ustalonego zbioru $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ wykazujemy, że rodzina

$$\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R}; A \times B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}$$

również jest σ –ciałem i zawiera wszystkie zbiory borelowskie w \mathbb{R} . Dowód jest w pełni analogiczny do przedstawionego wyżej – dla rodziny \mathcal{A} . Szczegóły pozostawiamy czytelnikowi. \square

11.2 Miara Lebesgue'a w \mathbb{R} i \mathbb{R}^2

Definicja 11.2.1. Miarą na σ -ciele \mathcal{A} nazywamy każdą przeliczalnie addytywną funkcję rozszerzoną $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ równą 0 na zbiorze pustym \emptyset .

Miara μ jest skończona, gdy przybiera tylko skończone wartości rzeczywiste.

Przykład 11.2.1. Na każdym σ -ciele \mathcal{A} określone są przynajmniej trzy miary. Miara zliczająca przypisuje każdemu skończonemu zbiorowi $A \in \mathcal{A}$ liczbę jego elementów, a każdemu nieskończonemu – wielkość ∞ . Z kolei miara trywialna przypisuje wartość ∞ każdemu zbiorowi niepustemu. Funkcja, która każdemu zbiorowi przypisuje wartość 0, też jest miarą.

Przykład 11.2.2 (Miara dyskretna). Niech $Z = \{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ będzie dowolnym przeliczalnym (lub skończonym) podzbiorem w \mathbb{R} , a $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Nawiązując do Przykładu 7.5.1, definiujemy miarę skończoną $\rho: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, przyjmując

$$\rho(A) = \sum_{n \in Z_A} a_n, \quad \text{gdzie } Z_A = \{n \in \mathbb{N}; z_n \in A\}.$$

Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia, że funkcja ρ istotnie jest miarą.

Skonstruowana w ten sposób miara jest ogólnym przykładem skończonej miary dyskretnej, skupionej na zbiorze Z . Miary dyskretne, dla których $\rho(\mathbb{R}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ są wykorzystywane w ramach kursu *Podstaw Probabilistyki*, gdzie służą do definiowania prawdopodobieństwa. Zbudowana w Przykładzie 7.5.1 funkcja niemalejąca f spełnia warunki

$$f(x) = \rho(-\infty, x] \quad \text{i} \quad \rho(a, b] = f(b) - f(a)$$

dla $x, a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) i charakteryzuje miarę ρ jako jej dystrybuanta.

Podstawowe, ważne dla obliczeń własności dowolnej miary obejmuje

Stwierdzenie 11.2.1. (i) Każda miara $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną, addytywną i σ -subaddytywną.

(ii) Dla dowolnego wstępującego ciągu zbiorów $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, tzn. takiego, że $A_n \subset A_{n+1}$ dla $n \geq 1$

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n). \quad (11.7)$$

(iii) Jeśli ciąg zbiorów o skończonej mierze $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, jest zstępujący, tzn. $A_n \supset A_{n+1}$ dla $n \geq 1$, to

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n). \quad (11.8)$$

Dowód. Addytywność miary jest szczególnym przypadkiem σ -addytywności – dla kolejnych składników równych \emptyset . Jeśli teraz $A, B \in \mathcal{A}$ i $A \subset B$, to z addytywności wynika monotoniczność

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

W szczególności, jeśli $\mu(A) < \infty$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Dowód σ -subaddytywności wystarczy ograniczyć do przypadku, gdy zbiór A jest sumą $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ciągu zbiorów $A_n \in \mathcal{A}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas zbiory $B_1 = A_1$ i $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{k < n} A_k) \in \mathcal{A}$ dla $n > 1$ są wzajemnie rozłączne, przy czym $\bigcup_{k \leq n} B_k = \bigcup_{k \leq n} A_k$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd i z wykazanej już monotoniczności miary otrzymujemy

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Jeśli zbiory $A_n, n \in \mathbb{N}$, tworzą ciąg wstępujący, to zdefiniowane wyżej zbiory $B_k, k \in \mathbb{N}$, tworzą rozkład każdego ze zbiorów $A_n = \bigcup_{k \leq n} B_k$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu(A_n).$$

Jeśli natomiast ciąg zbiorów $A_n, n \in \mathbb{N}$, jest zstępujący, to dla różnic $A'_n = A_1 \setminus A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, zachodzi równość $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n) = \lim_n \mu(A'_n)$, a więc

$$\mu(A_1 \setminus \bigcap_n A_n) = \lim_n (\mu(A_1) - \mu(A_n)),$$

jeśli tylko rozważane zbiory mają skończoną miarę. \square

Na potrzeby bieżącego kursu skorzystamy z podstawowego dla zaawansowanej *Analizy* faktu istnienia *miary Lebesgue'a na prostej* \mathbb{R} i ogólniej w przestrzeniach $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Ograniczamy się przy tym do miary borelowskiej, tzn. określonej na σ -ciele zbiorów borelowskich.

Twierdzenie 11.2.2 (Miara Lebesgue'a). (i) *Na σ -ciele $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ istnieje dokładnie jedna miara $\ell: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ taka, że*

$$\ell[a, b] = b - a \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, \quad (11.9)$$

czyli określona jako długość dla skończonych przedziałów domkniętych.

(ii) *Istnieje dokładnie jedna miara $\ell^2: \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow [0, \infty]$ spełniająca warunek*

$$\ell^2(A \times B) = \ell(A) \cdot \ell(B) \quad \text{dla } A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (11.10)$$

jeśli tylko miary zbiorów A i B są skończone.

Definicja 11.2.2. *Miarę ℓ na σ -ciele zbiorów borelowskich $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ spełniającą warunek (11.9) nazywamy miarą Lebesgue'a na prostej \mathbb{R} .*

Miarę ℓ^2 na σ -ciele zbiorów borelowskich $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ spełniającą warunek (11.10) nazywamy miarą Lebesgue'a na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 .

Wniosek 11.2.3. *Każdy zbiór skończony lub przeliczalny ma miarę Lebesgue'a równą 0. Miara Lebesgue'a dowolnego przedziału ograniczonego $J \subset \mathbb{R}$ o końcach $a < b$ wynosi $\ell(J) = b - a$. Każdy przedział nieograniczony ma miarę równą ∞ .* \square

Uwaga 11.2.1. Dowód obu tez zawartych w Twierdzeniu 11.2.2 czytelnik pozna zapewne w ramach kursu *Wstęp do Teorii Miary i Całki*. Klasyczny dowód obejmuje wzór definiujący miarę Lebesgue'a dla dowolnego zbioru borelowskiego (i nie tylko). Wzór ten pomijamy, celowo, gdyż ma dla nas niewielkie znaczenie praktyczne w tym sensie, że nie pomaga wyznaczać wartości miary konkretnych, badanych zbiorów. Z tego punktu widzenia bardziej istotne są szczególne własności miar zawarte w Stwierdzeniu 11.2.1, odwołujące się do sum szeregów i granic ciągów.

Ćwiczenie 11.2.1. Sprawdzić, że miara Lebesgue'a zbioru Cantora \mathcal{C} (Definicja 7.5.1) jest równa 0. Funkcja Cantora–Lebesgue'a φ odwzorowuje zbiór Cantora na cały przedział $\varphi[\mathcal{C}] = [0, 1]$, o mierze równej 1.

11.3 Funkcje schodkowe

Definicja 11.3.1. *Funkcję rzeczywistą ϕ na przedziale $[a, b]$ będziemy nazywać funkcją schodkową, gdy istnieje podział $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ oraz liczby c_1, \dots, c_n , takie że*

$$\phi(x) = c_i, \quad \text{jeśli } x_{i-1} < x < x_i \quad \text{dla } i \leq n. \quad (11.11)$$

Podany tu warunek nie nakłada ograniczeń na wartości funkcji schodkowej ϕ w punktach podziału P . Równość $L(f, P) = U(f, P) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ daje

Stwierdzenie 11.3.1. *Każda funkcja schodkowa jest całkowalna w sensie Riemanna i zachodzi równość $\int_a^b \phi = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ dla funkcji ϕ postaci (11.11).* \square

Jako wniosek otrzymujemy stąd

Twierdzenie 11.3.2 (Charakteryzacja całki Riemanna poprzez funkcje schodkowe). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną.*

(i) *Dla dowolnego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$,*

$$L(f, P) = \int_a^b \phi_P \quad i \quad U(f, P) = \int_a^b \psi_P, \quad (11.12)$$

gdzie ϕ_P i ψ_P są funkcjami schodkowymi

$$\phi_P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in P \\ m_i(f), & \text{gdy } x_{i-1} < x < x_i \end{cases} \quad \psi_P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in P \\ M_i(f), & \text{gdy } x_{i-1} < x < x_i \end{cases}$$

takimi, że $\phi_P \leq f \leq \psi_P$.

(ii) *Zachodzą równości*

$$L_a^b(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi; \phi \leq f \text{ jest funkcją schodkową} \right\} \quad (11.13)$$

oraz

$$U_a^b(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi; \psi \geq f \text{ jest funkcją schodkową} \right\}. \quad (11.14)$$

Dowód. Własność (i) wynika bezpośrednio ze Stwierdzenia 11.3.1. Dla dowodu (ii) rozważmy dowolną funkcję schodkową $\phi \leq f$. Jeśli ϕ przyjmuje wartości $c_i \in \mathbb{R}$ na otwartych przedziałach podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, to dla każdego $i \leq n$ z nierówności $\phi \leq f$ wynika $c_i \leq f(x)$ dla $x \in (x_{i-1}, x_i)$, czyli $c_i \leq m_i(f)$. Stąd nierówność

$$\int_a^b \phi \leq L(f, P) \leq L_a^b(f).$$

Analogiczną obserwację dla dowolnej funkcji schodkowej $\psi \geq f$ pozostawiamy czytelnikowi. Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz powołać się na Twierdzenie 2.1.4. \square

Zgodnie z definicją i Twierdzeniem 11.3.2(ii), całka Riemanna z nieujemnej funkcji całkowalnej f jest specyficznym sposobem wyznaczania *pola pod wykresem*, czyli 2-wymiarowej miary przypisanej *zbiorowi pod wykresem* funkcji f ,

$$W_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ i } 0 \leq y \leq f(x)\}. \quad (11.15)$$

a całkowalność funkcji w sensie Riemanna oznacza, że wskazane dwa sposoby pomiaru dają ten sam wynik. Mając do dyspozycji miarę Lebesgue'a, wykazujemy

Lemat 11.3.3. *Całka Riemanna dowolnej nieujemnej funkcji schodkowej ϕ jest miarą Lebesgue'a zbioru $W_\phi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, tzn. $\int_a^b \phi = \ell^2(W_\phi)$ dla $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dowód. Jeśli funkcja schodkowa ϕ jest postaci (11.11) dla pewnego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ i liczb $c_i, i \leq n$, wówczas zbiór W_ϕ jest sumą rozłącznych zbiorów

$$\begin{aligned} \{x_i\} \times [0, \phi(x_i)] & \quad \text{dla } i = 0, \dots, n, \quad \text{oraz} \\ (x_{i-1}, x_i) \times [0, c_i] & \quad \text{dla } i \leq n \end{aligned}$$

i jako taki jest zbiorem borelowskim. Ponieważ pierwsze $n + 1$ zbiorów ma miarę równą 0, otrzymujemy stąd równość

$$\ell^2(W_\phi) = \sum_{i \leq n} \ell(x_{i-1}, x_i) \cdot \ell[0, c_i] = \int_a^b \phi$$

– zgodnie ze Stwierdzeniem 11.3.1. □

Dalsze własności całki Riemanna i jej związki z miarą Lebesgue'a wyprowadzimy korzystając ze szczególnego ciągu podziałów. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech P_n oznacza podział przedziału $[a, b]$, taki że

$$P_n = \{x_0, \dots, x_{2^n}\}, \quad \text{gdzie } x_i = a + i \frac{b-a}{2^n} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, 2^n,$$

co pociąga za sobą inkluzję $P_n \subset P_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Zgodnie z Twierdzeniem 11.3.2(i), dla specyficznych funkcji schodkowych ϕ_n i ψ_n takich, że

$$\phi_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in P_n \\ \inf\{f(t); x_{i-1} < t < x_i\}, & \text{gdzie } x_{i-1} < x < x_i, \end{cases} \quad (11.16)$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in P_n \\ \sup\{f(t); x_{i-1} < t < x_i\}, & \text{gdzie } x_{i-1} < x < x_i, \end{cases} \quad (11.17)$$

zachodzą równości $U(f, P_n) = \int_a^b \psi_n$, $L(f, P_n) = \int_a^b \phi_n$.

Lemat 11.3.4 (Techniczny). (i) *Funkcje (11.16)–(11.17) spełniają nierówności*

$$\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f \leq \psi_{n+1} \leq \psi_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) *Jeśli $x \in (a, b)$ jest punktem ciągłości funkcji f , to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że dla każdego $n \geq m$ zachodzą nierówności*

$$f(x) - \varepsilon \leq \phi_n(x) \leq \psi_n(x) \leq f(x) + \varepsilon. \quad (11.18)$$

Dowód. Nierówności podane w (i) są oczywiste. Dla dowodu (ii) rozważmy $\varepsilon > 0$ i dowolny punkt $x \in (a, b)$, w którym funkcja f jest ciągła. Istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $t \in (x - \delta, x + \delta) \subset (a, b)$. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{b-a}{2^m} < \delta$; wówczas dla każdego $n \geq m$ znajdujemy $i < 2^n$, dla którego liczby $x_{i-1}, x_i \in P_n$ spełniają nierówności

$$x - \delta < x_{i-1} < x \leq x_i < x + \delta,$$

czyli $i - 1 < \frac{2^n(x-a)}{b-a} \leq i$. Oznacza to, że szukane i jest częścią całkowitą $\lfloor \frac{2^n(x-a)}{b-a} \rfloor$. Bezpośrednio z definicji funkcji ϕ_n i ψ_n otrzymujemy nierówności (11.18). \square

Twierdzenie 11.3.5 (Geometryczna interpretacja całki). (i) *Dla dowolnej nieujemnej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ całkowalnej w sensie Riemanna istnieją zbiory borelowskie $W^l, W^u \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ takie, że*

$$W^l \subset W_f \subset W^u \quad \text{ i } \quad \ell^2(W^l) = \int_a^b f = \ell^2(W^u).$$

(ii) *Jeśli funkcja $f \geq 0$ jest całkowalna w sensie Riemanna i zbiór W_f jest borelowski, zachodzi równość*

$$\int_a^b f = \ell^2(W_f). \quad (11.19)$$

Dowód. Dla dowodu (i) wystarczy przyjąć $W^l = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_{\phi_n}$, $W^u = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{\psi_n}$. Ze Stwierdzenia 11.2.1 wynikają wówczas równości

$$\ell^2(W^l) = \lim_n \ell^2(W_{\phi_n}) \quad \text{ i } \quad \ell^2(W^u) = \lim_n \ell^2(W_{\psi_n}),$$

a zgodność obu granic z całką zapewnia Twierdzenie Darboux. Równość (11.19) jest oczywistym wnioskiem z (i). \square

Ćwiczenie 11.3.1. Sprawdzić, że dla funkcji ciągłej $f \geq 0$ zachodzi równość $W_f = W^u$, a więc także $\int_a^b f = \ell^2(W_f)$.

Uwaga 11.3.1. W ogólności zbiór W_f niekoniecznie jest borelowski, natomiast różni się od każdego ze zbiorów borelowskich W^l i W^u o jeden ze zbiorów pomijalnych,

$$W_f \setminus W^l, W^u \setminus W_f \subset W^u \setminus W^l, \quad \text{gdzie} \quad \ell^2(W^u \setminus W^l) = 0,$$

czyli o podzbiór zbioru borelowskiego o mierze równej 0. W klasycznej teorii miary miarę Lebesgue'a rozszerza się na σ -ciało *większe* niż rodzina zbiorów borelowskich – za mierzalne w sensie Lebesgue'a przyjmuje się także

wszystkie zbiory będące sumą (lub różnicą) zbioru borelowskiego i zbioru pomijalnego. Dla rozszerzonej w ten sposób miary Lebesgue'a i nieujemnej funkcji f całkowalnej w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ zachodzi oczywiście równość $\int_a^b f = \ell^2(W_f)$. Kolejnym krokiem takiego rozszerzenia jest *całka Lebesgue'a*, która pojawia się w naturalny sposób w kolejnym kursie *Analizy*.

Ćwiczenie 11.3.2. Korzystając z sum dolnych Darboux wykazać, że dla funkcji ciągłych zachodzi także równość $\int_a^b f = \ell^2(W_f^o)$, gdzie

$$W_f^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < b < x \text{ i } 0 < y < f(x)\}.$$

Wynioskować stąd, że sam *wykres* funkcji ciągłej ma miarę 0.

11.4 Twierdzenie Lebesgue'a o całkowalności

Związki pomiędzy całką Riemanna, ciągłością funkcji i miarą Lebesgue'a precyzuje kilka twierdzeń, z których za najważniejsze uważa się

Twierdzenie 11.4.1 (Lebesgue'a). *Ograniczona funkcja zmiennej rzeczywistej f określona na ograniczonym przedziale domkniętym $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór punktów nieciągłości N_f ma miarę Lebesgue'a $\ell(N_f) = 0$.*

Przypominamy, że zgodnie z Twierdzeniem 7.2.1 zbiór $N_f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ jest *mierzalny* – ma określoną miarę Lebesgue'a. Dowody obu części twierdzenia są niezależne.

Dowód Twierdzenia 11.4.1 – warunek dostateczny całkowalności. Niech f będzie funkcją ograniczoną na przedziale $[a, b]$ i taką, że $\ell(N_f) = 0$. Z Lematu 11.3.4(ii) wynika, że dla każdej liczby $\eta > 0$ zbiór $[a, b] \setminus N_f$ punktów ciągłości funkcji f zawarty jest w sumie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(\eta)$, gdzie zbiory

$$E_n(\eta) = \{x \in [a, b]; \forall k \geq n \psi_k(x) - \phi_k(x) \leq \eta\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \quad (11.20)$$

tworzą ciąg zstępujący. Zauważmy przy tym, że $E_n(\eta)$ jest zbiorem borelowskim, jako przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów $\{x; \psi_k(x) - \phi_k(x) \leq \eta\}$, $k \geq n$, będących sumą skończonej liczby przedziałów. Przyjmijmy $E'_n(\eta) := [a, b] \setminus E_n(\eta)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $N_f \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E'_n(\eta)$ ma miarę 0, ze Stwierdzenia 11.2.1 wynika, że

$$\lim_n \ell(E'_n(\eta)) = \ell\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E'_n(\eta)\right) = 0,$$

dla każdego $\eta > 0$. Wybierzmy zależną od η liczbę $m \in \mathbb{N}$ taką, że $\ell(E'_m(\eta)) < \eta$ i dla dowolnego $n \geq m$ przechodzimy do całki Riemanna z funkcji schodkowej $\psi_n - \phi_n \geq 0$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n - \phi_n) &= \sum_{i \leq 2^k} M_i \ell(x_{i-1}, x_i) \\ &= \sum_{i \leq 2^n} M_i \ell((x_{i-1}, x_i) \cap E_m(\eta)) + \sum_{i \leq 2^n} M_i \ell((x_{i-1}, x_i) \cap E'_m(\eta)), \end{aligned}$$

gdzie liczby $M_i = \sup \{f(x) - f(y); x, y \in (x_{i-1}, x_i)\}$, $i \leq 2^n$, będące stałymi wartościami funkcji $\psi_n - \phi_n$, są ograniczone przez $M := 2 \sup(|f|)$. Jeśli dla pewnego i zbiór $E_m(\eta)$ zawiera punkt $x \in (x_{i-1}, x_i)$, wówczas nierówność $\psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \eta$ implikuje $M_i \leq \eta$. Pozwala to oszacować składniki pierwszej z sum. Dla obu sum mamy nierówność

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n - \phi_n) &\leq \sum_{i \leq 2^n} \eta \ell(x_{i-1}, x_i) + M \ell\left(\bigcup_{i \leq 2^n} (x_{i-1}, x_i) \cap E'_m(\eta)\right) \\ &\leq \eta \ell(a, b) + M \ell(E'_m(\eta)) < \eta((b-a) + M). \end{aligned}$$

Wykazaliśmy tym samym, że wystarczy przyjąć $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a+M}$, a wówczas dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $0 \leq \int_a^b (\psi_n - \phi_n) < \varepsilon$, co kończy dowód całkowalności funkcji f . \square

Wniosek 11.4.2 (Całka jako miara). *Każda ograniczona funkcja rzeczywista $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o co najwyżej przelicznej liczbie punktów nieciągłości jest całkowalna w sensie Riemanna. Część dodatnia $f^+ = \max\{f, 0\}$ i ujemna $f^- = \max\{-f, 0\}$ są także całkowalne i zachodzi równość*

$$\int_a^b f = \ell^2(W_{f^+}) - \ell^2(W_{f^-}), \quad (11.21)$$

przy czym oba zbiory pod wykresem należą do $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$.

Dowód. Ponieważ $f = f^+ - f^-$ i każda z funkcji ma co najwyżej przeliczny zbiór punktów nieciągłości, wystarczy ograniczyć się do przypadku $f \geq 0$. Z udowodnionej już części twierdzenia wynika całkowalność funkcji f , a wobec Twierdzenia 11.3.5 pozostaje udowodnić, że W_f jest zbiorem borelowskim. Korzystając z funkcji schodkowych (11.16)–(11.17), zauważamy równość

$$W^u \setminus W_f = \bigcup_{x \in N_f} \{x\} \times (f(x), f^u(x)], \quad (11.22)$$

gdzie $f^u(x) = \inf_n \psi_n(x)$ dla $x \in [a, b]$, zaś $W^u = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{\psi_n} = W_{f^u}$ jest zbiorem pod wykresem. Istotnie, z Lematu 11.3.4(ii) wynika zbieżność $\psi_n(x) \rightarrow f(x)$, a więc także równość $f^u(x) = f(x)$ dla każdego punktu $x \notin N_f$. Ponieważ, z założenia, zbiór N_f jest co najwyżej przeliczalny, zbiór (11.22) jest zbiorem borelowskim i tę samą własność ma W_f . \square

Dowód Twierdzenia 11.4.1 – warunek konieczny. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Korzystając z Twierdzenia 7.2.1, przedstawiamy zbiór N_f punktów nieciągłości w postaci

$$N_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n, \quad \text{gdzie} \quad D_n = \{x \in [a, b]; \omega_f(x) > \frac{1}{n}\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Funkcja f całkowalna w sensie Riemanna spełnia warunek (10.13), a zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ przedziału $[a, b]$, dla którego

$$\sum_{i \leq m} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \quad (11.23)$$

Przyjmijmy $J_n = \{i \leq m; M_i(f) - m_i(f) > \frac{1}{n}\}$; udowodnimy inkluzję

$$D_n \subset P \cup \bigcup_{j \in J_n} (x_{j-1}, x_j).$$

Istotnie, dowolny punkt nieciągłości $x \in D_n \setminus P$ leży w pewnym przedziale otwartym (x_{j-1}, x_j) , $j \leq m$, a więc $(x - \delta, x + \delta) \subset (x_{j-1}, x_j)$ dla pewnego $\delta > 0$. Skoro $\omega_f(x) > \frac{1}{n}$, z definicji oscylacji wynika, że w przedziale $(x - \delta, x + \delta)$ istnieją liczby y, z takie, że $f(y) - f(z) > \frac{1}{n}$. Zatem

$$M_j(f) - m_j(f) > \frac{1}{n} \implies j \in J_n.$$

Dla miary Lebesgue'a oznacza to oszacowanie

$$\ell(D_n) \leq \sum_{j \in J_n} (x_i - x_{i-1}) < n\varepsilon,$$

gdzie ostatnia z nierówności wynika z (11.23). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, z dowolności $\varepsilon > 0$ wnioskujemy, że $\ell(D_n) = 0$. Zatem $\ell(N_f) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(D_n) = 0$. \square

11.5 Całkowanie numeryczne

W bieżącym podrozdziale wskazujemy trzy klasyczne metody prezentowane tu jako algorytmy, narzędzia służące do numerycznego, przybliżonego

wyznaczania wartości całek Riemanna. Możliwość uzyskania dostatecznie szybkiej zbieżności, czyli – akceptowalnej dokładności po wykonaniu relatywnie niewielkiej liczby obliczeń – zależy od wybranej metody, ale wiąże się też z podwyższonymi wymaganiami dotyczącymi różniczkowalności całkowanej funkcji.

Najprostsza z prezentowanych, *metoda prostokątów*, sprowadza się do wyznaczenia sumy Riemanna (10.16) dla wyboru ξ złożonego ze środków odcinków, na które dzieli się przedział całkowania.

Twierdzenie 11.5.1 (Metoda prostokątów). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , której druga pochodna f'' istnieje i jest ograniczona w przedziale (a, b) . Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + R_n, \quad (11.24)$$

gdzie punkty $x_i = a + ih$ dla $h = \frac{b-a}{n}$, $i \leq n$, tworzą równomierny podział przedziału całkowania, a reszta R_n wyraża się wzorem

$$R_n = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\zeta) \quad (11.25)$$

dla pewnego $\zeta \in (a, b)$. Jeśli funkcja f'' jest całkowna, zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{h^2} = \frac{1}{24} f''|_a^b. \quad (11.26)$$

Dowód. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Dla $i \leq n$ niech c_i oznacza środek przedziału $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. Zgodnie z Twierdzeniem 9.1.3, dla każdego $x \in J_i$ zachodzi wzór Taylora

$$f(x) = f(c_i) + f'(c_i)(x - c_i) + \varphi(x)(x - c_i)^2, \quad (11.27)$$

w którym $\varphi(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}$, a ξ_x jest pewnym (nieznany, zależnym od x) punktem wewnętrznym przedziału. Jeśli $x \neq c_i$, równość (11.27) określa $\varphi(x)$ jednoznacznie. Ponieważ reguła de L'Hôpitala pozwala stwierdzić istnienie granicy

$$\lim_{x \rightarrow c_i} \frac{f(x) - f(c_i) - f'(c_i)(x - c_i)}{(x - c_i)^2} = \lim_{x \rightarrow c_i} \frac{f'(x) - f'(c_i)}{2(x - c_i)} = \frac{f''(c_i)}{2},$$

dla uzyskania ciągłości funkcji $\varphi: J_i \rightarrow \mathbb{R}$ wystarczy przyjąć $\varphi(c_i) = \frac{f''(c_i)}{2}$. Dla każdego $i \leq n$, całkując tożsamość (11.27) i korzystając z Twierdzenia o wartości średniej, otrzymujemy

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = hf(c_i) + \varphi(\eta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - c_i)^2 dx = hf(c_i) + \frac{h^3}{24} f''(\zeta_i),$$

gdzie zarówno η_i jak i $\zeta_i = \xi_{\eta_i}$ leży wewnątrz przedziału J_i . Suma otrzymanych w ten sposób zależności daje równość (11.24), w której

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{24} f''(\zeta_i) = \frac{(b-a)h^2}{24} \frac{f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n)}{n},$$

gdzie $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ dla $i \leq n$. Ponieważ średnia n liczb jest zawarta między najmniejszą a największą z nich, końcowa postać reszty R_n wynika z własności Darboux dla pochodnej f'' (Wniosek 8.3.4).

Wyrażenie $\frac{b-a}{n}(f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n))$ jest jedną z sum Riemanna dla całki $\int_a^b f''$. Jeśli pochodna f'' jest całkowalna, zgodnie z Twierdzeniem Darboux 6.3.1 – i wzorem całkowym Newtona–Leibniza – wartością graniczną ciągu sum jest całka równa $f'(b) - f'(a)$. \square

Każdy składnik sumy Riemanna (11.24) opowiada polu prostokąta o podstawie $[x_{i-1}, x_i]$. Dwa kolejne sposoby aproksymacji całki Riemanna $\int_a^b f$ opierają się na analogicznym pomysłe, by dla ustalonego równomiernego podziału $a = x_0 < \dots < x_n = b$ poszczególne składniki sumy

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f dx$$

przybliżać dokładną wartością pola figury w \mathbb{R}^2 , w której odpowiedni fragment wykresu krzywej f zastąpiony jest przez odcinek siecznej lub wykres wielomianu.

Metoda *trapezów*, korzysta z przybliżenia

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \quad \text{dla } i \leq n,$$

w którym całkowaną funkcję $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ zastępuje funkcja liniowa

$$f_i(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Jeśli funkcja f ma wyższą klasę gładkości, lepszą dokładność uzyskamy stosując metodę *Simpsona*,

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) \quad \text{dla } i \leq n,$$

w której przedziały (w liczbie $2n$) grupujemy w pary, a przy obliczaniu całki funkcję $f|_{[x_{2i-2}, x_{2i}]}$ zastępuje wielomian stopnia drugiego mający w punktach $x = x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$ te same wartości, co f .

Szczegółowy opis *jednostkowego* błędu przybliżenia każdej z metod zawiąza

Lemat 11.5.2. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnej w przedziale otwartym (a, b) , niech $r_1(f)$ i $r_2(f)$ oznaczają reszty występujące, odpowiednio, we wzorze porównującym wartość całki z polem trapezu i we wzorze Simpsona,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + r_1(f) = \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)) + r_2(f).$$

(i) Jeśli pochodna f'' istnieje w przedziale (a, b) i jest ograniczona, wówczas

$$r_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\zeta) \quad \text{dla } h := b-a, \quad (11.28)$$

gdzie ζ jest pewną liczbą z przedziału (a, b) .

(ii) Jeśli f ma w przedziale (a, b) ograniczoną czwartą pochodną $f^{(4)}$, to

$$r_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\zeta) \quad \text{dla } h := \frac{b-a}{2}. \quad (11.29)$$

gdzie $\zeta \in (a, b)$.

Pomysłowy, raczej pracochłonny dowód lematu został umieszczony pod koniec bieżącego podrozdziału.

Twierdzenie 11.5.3 (Metoda trapezów). Przy założeniach z Twierdzenia 11.5.1, dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right) + R_n, \quad (11.30)$$

gdzie $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\zeta)$ dla pewnego $\zeta \in (a, b)$. Jeśli funkcja f'' jest całkowalna,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{h^2} = -\frac{1}{12}f''|_a^b. \quad (11.31)$$

Dowód. Z Lematu 11.5.2(i) zastosowanego do każdego z przedziałów o długości $h = \frac{b-a}{n}$ wynika wzór (11.30) z resztą

$$R_n = -\sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12}f''(\zeta_i) = -\frac{(b-a)h^2}{12} \frac{f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n)}{n},$$

gdzie $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ dla $i \leq n$. Tak, jak w dowodzie Twierdzenia 11.5.1, końcowa postać reszty R_n wynika z własności Darboux dla pochodnej f'' , a postać graniczna (11.31) – z Twierdzenia Darboux dla sum Riemanna. \square

Uwaga 11.5.1. Liczba h jest tzw. *krokiem*, a dokładność metody wzrasta, gdy jej krok zbliża się do 0. Porównując wzory (11.30)–(11.31) z wcześniejszymi oszacowaniami (11.24)–(11.26) zauważamy podobne tempo zbieżności, a czynnik h^2 w każdym z nich oznacza, że zmiana podziału z n na $10n$ części prowadzi do ok. 100-krotnego zmniejszenia błędu przybliżenia, co daje kolejne dwie dokładne cyfry rozwinięcia dziesiętnego szukanej liczby. Co więcej, błąd w metodzie prostokątów ma przeciwny znak i jest o ok. połowę mniejszy, niż – w analogicznej metodzie trapezów. Szukana dokładna wartość całki $\int_a^b f$ powinna się znajdować w przedziale otwartym pomiędzy

$$Pr_a^b(f, n) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \quad \text{a} \quad (11.32)$$

$$Tr_a^b(f, n) := \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right), \quad (11.33)$$

a wyrażenie

$$Si_a^b(f, n) := \frac{2}{3} Pr_a^b(f, n) + \frac{1}{3} Tr_a^b(f, n), \quad (11.34)$$

redukujące graniczną wartość błędu (11.26)–(11.31), powinno być przybliżeniem istotnie lepszym. Otrzymany wzór $Si_a^b(f, n)$ oznacza dokładnie prezentowaną niżej metodę Simpsona (sprawdzić!).

Twierdzenie 11.5.4 (Metoda Simpsona). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^3 , której czwarta pochodna $f^{(4)}$ istnieje i jest ograniczona w przedziale (a, b) . Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right) + R_n, \quad (11.35)$$

gdzie punkty $x_i = a + ih$ dla $h = \frac{b-a}{2n}$, $i \leq 2n$, tworzą równomierny podział przedziału całkowania, a reszta R_n wyraża się wzorem

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\zeta) \quad (11.36)$$

dla pewnego $\zeta \in (a, b)$. Jeśli funkcja $f^{(4)}$ jest całkowalna, zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{h^4} = -\frac{1}{180} f'''|_a^b. \quad (11.37)$$

Dowód. Z Lematu 11.5.2(iii), dla każdego z przedziałów $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i \leq n$, długości $\frac{b-a}{n} = 2h$, otrzymujemy wzór Simpsona (11.35) z resztą

$$R_n = -\sum_{i=1}^n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_i) = -\frac{(b-a)h^4}{180} \frac{f^{(4)}(\zeta_1) + \dots + f^{(4)}(\zeta_n)}{n},$$

gdzie $\zeta_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ dla $i \leq n$. Równość (11.36) wynika z własności Darboux pochodnej $f^{(4)}$ (Wniosek 8.3.4). Jeśli pochodna $f^{(4)}$ jest całkowalna, istnienie granicy (11.31) wynika z Twierdzenia Darboux 6.3.1 dla sum Riemanna. \square

Uwaga 11.5.2. Wyrażenia (11.32) i (11.33) są przykładami sum Riemanna (10.17), a więc z Twierdzenia Darboux 10.1.7 wynika, że rozważane ciągi sum są zbieżne do całki $\int_a^b f$ – o ile tylko funkcja f jest całkowalna. Własność ta przenosi się oczywiście na ciąg sum $(Si_a^b(f, n))_{n \in \mathbb{N}}$ rozważanych w metodzie Simpsona. Twierdzenia 11.5.1, 11.5.3 i 11.5.4 precyzują, przy jakich założeniach dotyczących pochodnych funkcji f możemy kontrolować dokładność uzyskanego daną metodą przybliżenia.

Przykład 11.5.1. Wyznaczając wartość całki $\mathcal{J} = \int_0^{10} \frac{\sin(x)}{x} dx$ przy pomocy metody prostokątów (z lewej) i metody trapezów (z prawej) otrzymujemy, dla liczby kroków $n = 10, 100, 1000$, przybliżenia

$$\begin{aligned} 1,662 &> \mathcal{J} > 1,652 \\ 1,65838 &> \mathcal{J} > 1,65828 \\ 1,6583479 &> \mathcal{J} > 1,6583469 \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu współczynnika $c = f'|_0^{10} \approx -0,0785$ występującego we wzorach (11.26)–(11.31) możemy skorygować wolniej zbieżne metody i porównać $pr(f, n) = Pr_0^{10}(f, n) + c \frac{h^2}{24}$ oraz $tr(f, n) = Tr_0^{10}(f, n) - c \frac{h^2}{12}$ z metodą Simpsona $si(f, n) = Si_0^{10}(f, n)$.

$n =$	10	100	1000
$pr(f, n)$	1,65842	1,658347601	1,6583475942196
$si(f, n)$	1,65836	1,658347596	1,6583475942190
$tr(f, n)$	1,65825	1,658347585	1,6583475942180

Tabela 11.1: Porównanie dokładności metod całkowania

Zgodnie z oczekiwaniami, czynnik h^4 występujący we wzorze (11.36) powoduje, że każdorazowa zmiana podziału z n na $10n$ części daje kolejne 4 dokładne cyfry przybliżanej liczby. Ponieważ nie znamy wartości dokładnej (por. Przykład 10.6.1), proponujemy czytelnikowi wstępną ocenę dokładności – poprzez porównanie otrzymanych wyników ze skorygowanymi metodami $pr(f, n)$ i $tr(f, n)$.

Oszacowanie jednostkowego błędu wzorów przybliżających wartość całki $\int_a^b f$ wyprowadzamy z jawnego opisu błędu przybliżenia samej funkcji f odpowiednim wielomianem *interpolacyjnym* – stopnia 1–3.

Stwierdzenie 11.5.5 (Twierdzenie o interpolacji). Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niech L_1 oznacza funkcję liniową równą f w końcach przedziału, zaś L_2 – wielomian kwadratowy przyjmujący te same wartości co $f(x)$ dla $x = a, b$ oraz w środku przedziału $c = \frac{a+b}{2}$.

(i) Jeśli druga pochodna f'' istnieje w przedziale (a, b) , to dla $x \in [a, b]$

$$f(x) = L_1(x) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b),$$

gdzie ξ_x jest zależnym od x punktem przedziału (a, b) .

(ii) Jeśli w przedziale (a, b) istnieje trzecia pochodna f''' , to

$$f(x) = L_2(x) + \frac{f'''(\xi_x)}{6}(x-a)(x-b)(x-c),$$

gdzie $\xi_x \in (a, b)$ dla $x \in [a, b]$.

(iii) Jeśli w przedziale (a, b) istnieje pochodna $f^{(4)}$, a H_3 jest wielomianem stopnia 3 mającym te same wartości co $f(x)$ dla $x = a, b, c$ i ponadto $H_3'(c) = f'(c)$, to

$$f(x) = H_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x-a)(x-b)(x-c)^2,$$

gdzie $\xi_x \in (a, b)$ dla $x \in [a, b]$.

Uwaga 11.5.3. Ogólnie, wielomiany interpolacyjne mają w wybranych punktach te same wartości co badana funkcja i (ewentualnie) jej pochodne. L_1 i L_2 stanowią przykład wielomianów Lagrange'a, natomiast H_3 jest jednym z wielomianów interpolacyjnych Hermite'a. Tożsamości sformułowane w punktach (i)–(iii) dowodzą (ćwiczenie!), że podane warunki spełnia co najwyżej jeden układ wielomianów. Jawny wzór opisujący H_3 zawiera dowód Lematu 11.5.2. Zagadnienie interpolacji wchodzi w skład bardziej zaawansowanej *Analizy II* i *Analizy numerycznej*.

Dowód Stwierdzenia 11.5.5. Niech x będzie dowolnym ustalonym punktem przedziału (a, b) . Dowód jest analogiczny do dowodu wzoru Taylora i w każdym przypadku korzysta z uogólnionego Twierdzenia Rolle'a.

(i) Funkcja $g(t) = f(t) - L_1(t) - [f(x) - L_1(x)] \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}$, dla $t \in [a, b]$, jest ciągła i ma w przedziale otwartym drugą pochodną g'' , a przy tym znika w punktach $t = a, b, x$. Ze Stwierdzenia 9.1.4 wynika istnienie $\xi_x \in (a, b)$ takiego, że

$$0 = g''(\xi_x) = f''(\xi_x) - [f(x) - L_1(x)] \frac{2}{(x-a)(x-b)},$$

gdzie korzystamy z tożsamości $L_1'' \equiv 0$.

(ii) Wykazywana tożsamość jest oczywista dla $x = c$. Jeśli założymy, że $x \neq c$, wówczas funkcja $g(t) = f(t) - L_2(t) - [f(x) - L_2(x)] \frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, dla $t \in [a, b]$, jest ciągła i ma w przedziale otwartym trzecią pochodną g''' , a przy tym znika w czterech punktach $t = a, b, c, x$. Ponieważ $L_2''' \equiv 0$, ze Stwierdzenia 9.1.4 wynika istnienie $\xi_x \in (a, b)$ takiego, że

$$0 = g'''(\xi_x) = f'''(\xi_x) - [f(x) - L_2(x)] \frac{6}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

(iii) Jeśli pochodna $f^{(4)}$ istnieje w przedziale (a, b) , zakładamy, że $x \neq c$ i rozważamy funkcję $g(t) = f(t) - H_3(t) - [f(x) - H_3(x)] \frac{(t-a)(t-b)(t-c)^2}{(x-a)(x-b)(x-c)^2}$, dla $t \in [a, b]$. Łatwo sprawdzić, że $g(t) = 0$ dla $t = a, b, c, x$ i $g'(c) = 0$. Pochodna $g'(t)$ znika zatem w $t = c$ i przynajmniej w trzech punktach różnych od a, b, c . Z uogólnionego Twierdzenia Rolle'a wynika istnienie $\xi_x \in (a, b)$ takiego, że

$$0 = g^{(4)}(\xi_x) = f^{(4)}(\xi_x) - [f(x) - H_3(x)] \frac{24}{(x-a)(x-b)(x-c)^2},$$

gdzie korzystamy z tożsamości $H_3^{(4)} \equiv 0$ – dla każdego wielomianu stopnia 3.

W każdym z rozważanych przypadków otrzymane zależności są tożsame z postulowanymi w dowodzonym twierdzeniu. \square

Dowód Lematu 11.5.2. (i) Niech $L_1(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ze Stwierdzenia 11.5.5(i) wynika tożsamość $f(x) = L_1(x) + \varphi(x)(x-a)(x-b)$, w której

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - L_1(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{f''(\xi_x)}{2} \quad \text{dla } x \in (a, b)$$

jest funkcją ograniczoną i ciągłą, a więc całkowalną. Równość całek oznacza

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b L_1 - \int_a^b \varphi(x)(x-a)(b-x) dx \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \varphi(\eta) \int_a^b (x-a)(b-x) dx, \end{aligned}$$

dla pewnego $\eta \in (a, b)$, gdzie funkcja podcałkowa zawierająca φ spełnia założenia Twierdzenia 10.2.12. Ponieważ ostatnia z całek wynosi $\frac{(b-a)^3}{6}$, otrzymaliśmy tym samym wzór (11.28) dla $\zeta = \xi_\eta$.

(ii) Rozważamy wielomian $H_3 = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) + \gamma_1 f'(c)$ ze współczynnikami $\alpha(x) = \frac{(b-x)(c-x)^2}{(b-a)(c-a)^2}$, $\beta(x) = \frac{(x-a)(x-c)^2}{(b-a)(b-c)^2}$, oraz $\gamma(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{(c-a)(b-c)}$ i $\gamma_1(x) = \frac{(x-a)(b-x)(x-c)}{(c-a)(b-c)}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Po stwierdzeniu ciągłości i ograniczoności funkcji φ takiej, że $f(x) = H_3(x) + \varphi(x)(x-a)(x-b)(x-c)^2$ i $\varphi(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}$

dla $x \in (a, c) \cup (c, b)$, całkujemy i korzystamy z Twierdzenia 10.2.12(ii). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b H_3 + \varphi(\eta_1) \int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)^2 dx + \varphi(\eta_2) \int_c^b (x-a)(x-b)(x-c)^2 dx \\ &= \frac{h}{3}(f(a) + 4f(c) + f(b)) - \frac{h^5}{180}(f^{(4)}(\xi_{\eta_1}) + f^{(4)}(\xi_{\eta_2})) \end{aligned}$$

dla pewnych $\eta_1 \in (a, c)$ i $\eta_2 \in (c, b)$. Jeśli nieznane liczby $\xi_{\eta_1}, \xi_{\eta_2} \in (a, b)$ są różne, z własności Darboux dla pochodnej (Wniosek 8.3.4) wynika istnienie leżącego pomiędzy nimi punktu ζ , dla którego $f^{(4)}(\zeta) = \frac{f^{(4)}(\xi_{\eta_1}) + f^{(4)}(\xi_{\eta_2})}{2}$, a to oznacza postać reszty $r_2(f)$ podaną w (11.29). \square

Uwaga 11.5.4. Udowodnione wyżej oszacowanie błędu w metodzie Simpsona korzysta z przybliżenia całkowanej funkcji wielomianem H_3 stopnia 3, a nie – jak było zapowiedziane wcześniej – wielomianem L_2 stopnia 2. W istocie, oba podejścia prowadzą do tego samego wzoru przybliżającego wartość całki, a przyczyną tego jest równość $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) dx = 0$. Dzięki niej całka $\int_a^b f$ jest równie dobrze przybliżana przez wielomiany stopnia 2, a otrzymany wzór Simpsona pozostaje dokładny także dla wielomianów stopnia 3. Ponieważ jednak sama funkcja f może być przybliżana dokładniej przez wielomiany wyższych stopni, wybór H_3 pozwala na lepsze oszacowanie błędu.

Rozdział 12

Obliczenia numeryczne – zadania

Zestawienie ćwiczeń i proponowanych w tekście zadań wymagających wykonania obliczeń (lub wykresów) z pomocą dostępnego dla czytelnika programu komputerowego i/lub języka programowania.

Zadanie	Opis	Strona
Ćwiczenie 3.1.1	przybliżony wzór dla wyrazów ciągu Fibonacciego	str. 21
Ćwiczenie 3.2.1	wizualizacja pojęcia zbieżności dla wzorów Leibniza i Wallisa oraz dla złotej proporcji	str. 24
Ćwiczenie 3.3.1	przybl. liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 10^{-9}	str. 26
Ćwiczenie 3.5.1	przybl. liczby e zgodnie z podanym oszacowaniem błędu	str. 33
Rysunek 4.1	funkcje wykładnicze dla różnych podstaw	str. 50
Ćwiczenie 4.5.1	ilustracja nierówności $e_x \geq (1 + \frac{x}{n})^n$	str. 52
Uwaga 5.1.4	numeryczna ocena rozbieżności szeregu harmonicznego i zbieżności szeregu anharmonicznego	str. 57
Przykład 5.1.4	metody stopniowego przyspieszania zbieżności szeregu anharmonicznego	str. 58-str. 59
Ćwiczenie 5.2.2	wykres sumy szeregu trygonometrycznego	str. 65
Przykład 6.2.3	przykład funkcji nieciągłej	str. 79
Przykład 6.2.4	funkcja ciągła zdefiniowana kilkoma wzorami	str. 81
Przykład 6.3.1	algorytm połowienia dla obliczania $\sqrt{2}$	str. 85
Ćwiczenie 6.3.1	algorytm wyznaczania lokalnego maksimum funkcji	str. 87
Rysunek 6.1	funkcje potęgowe dla różnych wykładników	str. 88

Zadanie	Opis	Strona
Ćwiczenie 6.4.2	przybl. wartość π w oparciu o dokładną wartość $\sin(3^\circ)$	str. 91
Ćwiczenie 6.7.1	przybliżenie wielomianami funkcji \sin ; przybl. wartość $\frac{\pi}{6}$ jako miejsce zerowe wielomianów	str. 100
Ćwiczenie 7.4.3	wykres przykładowej funkcji i jej asymptot	str. 118
Ćwiczenie 8.1.1	szybki sposób wyznaczania liczby $\ln(2)$	str. 130
Przykład 8.2.3	wykresy funkcji różniczkowalnej, o nieciągłej pochodnej	str. 132
Ćwiczenie 8.2.1	przyspieszanie zbieżności szeregu Leibniza	str. 134
Przykład 8.3.1	wykres funkcji i jej pochodnej – czy TA funkcja jest monotoniczna?	str. 139
Ćwiczenie 8.3.2	wyznaczanie współczynnika we wzorze Stirlinga	str. 142
Przykład 8.7.2	badanie funkcji – szukanie punktów krytycznych	str. 159
Ćwiczenie 8.7.2	badanie funkcji $ 1 + \frac{1}{x} ^x$ dla $x \neq -1$	str. 160
Ćwiczenie 8.7.3	badanie funkcji $x^{\frac{3}{x}}$ dla $x \geq 0$	str. 160
Ćwiczenie 8.7.4	badanie funkcji $x^a \sin(x ^{-c})$ dla $ x \leq 1$	str. 161
Ćwiczenie 9.2.1	szereg <i>wolno zbieżny</i> do $\frac{\pi}{2}$	str. 171
Ćwiczenie 9.3.1	szereg <i>poprawiony</i> zbieżny do $\frac{\pi}{2}$	str. 172
Przykład 9.3.2	wyznaczanie π z szeregu dla $\arcsin(\frac{1}{2})$	str. 173
Ćwiczenie 9.3.3	wyznaczanie $\frac{\pi}{4}$ ze wzoru Machina	str. 174
Przykład 9.3.3	porównanie zbieżności metod wyznaczania (przybliżeń) liczb $\sin(1)$ i $\sin(2)$	str. 174
Przykład 9.3.4	sposób na szybkie wyznaczenie liczby $\ln(2)$	str. 175
Ćwiczenie 9.3.4	analogiczna metoda szybkiego wyznaczania liczb $\ln(3)$ i $\ln(5)$	str. 175
Przykład 9.3.5	wyznaczanie przybliżenia liczby $2^{\sqrt{2}}$	str. 175
Przykład 9.4.1	pochodnej – przybliżenia poprzez ilorazy różnicowe zwykłe i symetryczne; błędy zaokrągleń	str. 176
Ćwiczenie 9.4.1	przybliżone wyznaczanie drugiej pochodnej	str. 178
Przykład 9.5.1	wyznaczanie rozwiązania równania $\cos(x) = x$ metodą Picarda	str. 180
Przykład 9.5.3	metoda Newtona wyznaczania przybliżeń liczby $\sqrt[3]{3}$	str. 187
Uwaga 10.4.4	przyspieszanie zbieżności dla wzoru Wallisa	str. 215-str. 216
Przykład 10.5.2	stała γ Eulera-Mascheroniego; porównanie tempa zbieżności oryginalnego ciągu i ciągu (10.60)	str. 220
Przykład 10.6.1	wyznaczanie wartości całki $\int_0^{10} \frac{\sin(x)}{x} dx$ z szeregu potęgowego	str. 224
Przykład 11.5.1	wyznaczanie przybl. wartości całki $\int_0^{10} \frac{\sin(x)}{x} dx$ – porównanie metod	str. 250

Rozdział 13

Spis symboli i skrótów

Symbol	Opis	Definicja
\mathbb{R}^+	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich	str. 1
ORD 1.–ORD 2.	aksjomaty <i>liczb dodatnich</i>	str. 1
$ x $	wartość bezwzględna liczby $x \in \mathbb{R}$	str. 2
$x < y, x \leq y$ itd.	relacje nierówności	str. 2
$\operatorname{sgn}(x)$	znak liczby $x \in \mathbb{R}$	str. 3
ORD 3.	aksjomat <i>ciągłości</i>	str. 5
\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych	str. 5
\mathbb{Z}	zbiór liczb całkowitych	str. 6
\mathbb{Q}	zbiór liczb wymiernych	str. 6
$\max A, \min A$	maksimum, minimum zbioru $A \subset \mathbb{R}$	str. 6
$\binom{n}{k}$	współczynnik dwumianowy Newtona n po k	str. 7
$\lfloor x \rfloor$	część całkowita liczby $x \in \mathbb{R}$	str. 8
$\mathcal{S}(A)$	zbiór (przedział) ograniczeń górnych zbioru $A \subset \mathbb{R}$	str. 11
$\mathcal{I}(A)$	zbiór (przedział) ograniczeń dolnych zbioru $A \subset \mathbb{R}$	str. 12
$\sup A$	kres górny zbioru A	str. 12
$\inf A$	kres dolny zbioru A	str. 12
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek n -go stopnia z liczby a	str. 15
$a^{\frac{m}{n}}$	potęga ułamkowa liczby a	str. 17
a^x	potęga liczby a o wykładniku $x \in \mathbb{R}$	str. 17
$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	ciąg liczbowy	str. 20
$\sup_n a_n, \inf_n a_n$	kres górny, dolny ciągu liczbowego a	str. 21
$g = \lim_n a_n, a_n \rightarrow g$	granica ciągu, zbieżność a_n do granicy	str. 23
e	liczba Eulera	str. 28
$\overline{\mathbb{R}}$	zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony o $\pm\infty$	str. 34

Symbol	Opis	Definicja
$\mathcal{S}(a)$	zbiór ograniczeń górnych prawie wszystkich wyrazów ciągu a	str. 35
$\mathcal{I}(a)$	zbiór ograniczeń dolnych prawie wszystkich wyrazów ciągu a	str. 35
$\limsup_n a_n$	granica górna ciągu liczbowego a	str. 35
$\liminf_n a_n$	granica dolna ciągu liczbowego a	str. 35
$\sum a = (\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	szereg liczbowy, ciąg sum częściowych	str. 54
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	suma szeregu	str. 54
$\sum a(x) = (\sum a_n x^n)_{n \geq 0}$	szereg potęgowy zmiennej x	str. 67
$f: X \rightarrow \mathbb{R}, f: X \rightarrow Y$	funkcja rzeczywista, o wartościach w $Y \subset \mathbb{R}$	str. 74
$f[X]$	obraz funkcji	str. 74
1_X	funkcja tożsamościowa, identyczność na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$	str. 75
$f _{X'}$	obcięcie funkcji, ograniczenie dziedziny	str. 75
$f^{-1}Y$	przeciwwobraz zbioru Y względem funkcji f	str. 76
$g \circ f$	złożenie, superpozycja funkcji	str. 76
$f^{-1}: f[X] \rightarrow \mathbb{R}$	funkcja odwrotna	str. 76
$af + bg, fg, \frac{f}{g}$	działania na funkcjach	str. 78
\log_a, \ln	logarytm o podstawie a , logarytm naturalny	str. 93
\arcsin, \arccos, \arctg	funkcje cyklometryczne	str. 94
J°	wnętrze przedziału J	str. 103
G_δ, F_σ	wyróżnione rodziny zbiorów w \mathbb{R}	str. 103
$\tau_{\mathbb{R}}$	naturalna <i>topologia</i> w \mathbb{R} – rodzina zbiorów otwartych	str. 103
$\omega_f(x)$	oscylacja funkcji f w punkcie x	str. 107
N_f	zbiór punktów nieciągłości funkcji f	str. 107
$f_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	standardowe rozszerzenie dziedziny funkcji f	str. 109
$\lim_{x \rightarrow t^+} f(x), f(t^+)$	granica prawostronna funkcji f w $t \in \mathbb{R}$	str. 110
$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x), f(t^-)$	granica lewostronna funkcji f w $t \in \mathbb{R}$	str. 110
$\lim_{x \rightarrow t} f(x)$	granica funkcji w punkcie $t \in \mathbb{R}$	str. 110
$\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	funkcja Dirichleta	str. 110
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	granice funkcji w nieskończoności	str. 111
\mathcal{C}	zbiór Cantora	str. 123
$f'(t)$	pochodna funkcji f w punkcie t	str. 124
$f'_+(t), f'_-(t)$	pochodne jednostronne funkcji f	str. 124
$f_t: J \rightarrow \mathbb{R}$	funkcja przyrostowa dla $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $t \in J$	str. 126
$\frac{d}{dx} \Big _{x=t} f(x)$	alternatywne oznaczenie pochodnej	str. 127
$f''(t)$	druga pochodna, pochodna rzędu drugiego	str. 140
$f'''(t)$	trzecia pochodna, pochodna rzędu trzeciego	str. 149
C^k	klasa funkcji k -krotnie różniczkowalnych (z ciągłymi pochodnymi)	str. 154
$f^{(k)}, f^{(k)}(t)$	ogólne oznaczenie pochodnej rzędu $k \geq 0$.	str. 154

Symbol	Opis	Definicja
$\left.\frac{d^k}{dx^k}\right _{x=t} f(x)$	alternatywne oznaczenie pochodnej rzędu k	str. 155
$T_t^n F(x)$	wielomian Taylora n -go stopnia funkcji f w t	str. 162
$\binom{a}{n}$	współczynnik dwumianowy Newtona dla $a \in \mathbb{R}$	str. 166
$\mathcal{P}[a, b]$	zbiór podziałów przedziału $[a, b]$	str. 188
$\delta(P)$	średnica podziału P	str. 189
$L(f, P), U(f, P)$	dolna, górna suma Darboux funkcji f względem podziału P	str. 189
$m_i(f), M_i(f)$	minimum, maksimum funkcji f na i -tym przedziale otwartym podziału	str. 189
$\Delta(f, P)$	różnica między górną i dolną sumą Darboux	str. 190
$L_a^b(f), U_a^b(f)$	całka dolna, całka górna funkcji f na przedziale $[a, b]$	str. 190
$\int_a^b f$	całka Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$	str. 191
$\int_a^b f(x) dx$	alternatywne (klasyczne) oznaczenie całki Riemanna	str. 194
$R_\xi(f, P), R(f, P)$	sumy Riemanna względem podziału P	str. 195
$F _a^b, [F(x)]_{x=a}^{x=b}$	przyrost funkcji pierwotnej $F(b) - F(a)$	str. 207
$area(A)$	pole figury płaskiej $A \subset \mathbb{R}^2$	str. 211
$vol(V)$	objętość figury przestrzennej $V \subset \mathbb{R}^3$	str. 212
$len(\Gamma)$	długość łuku $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$	str. 213
$\int_a^\infty f, \int_{-\infty}^b f$	całki niewłaściwe (I rodzaju)	str. 217
γ	stała Eulera–Mascheroniego	str. 220
$\int f(x) dx$	całka nieoznaczona	str. 223
$d\varphi(t)$	różniczka funkcji	str. 226
$[0, \infty]$	rozszerzony przedział nieskończony w $\overline{\mathbb{R}}$	str. 233
$\sigma-$	własność funkcji lub rodziny zbiorów związana z przeliczalnymi sumami zbiorów	str. 233-str. 234
$\sigma(\mathcal{C})$	σ -ciało generowane przez rodzinę zbiorów \mathcal{C}	str. 235
$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$	rodziny zbiorów borelowskich w \mathbb{R} i w \mathbb{R}^2	str. 235
$\ell: \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$	miara Lebesgue’a na prostej	str. 238
$\ell^2: \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow [0, \infty]$	miara Lebesgue’a na płaszczyźnie	str. 238
W_f	zbiór (w \mathbb{R}^2) pod wykresem funkcji $f \geq 0$	str. 240
W^l, W^u	zbiory borelowskie ograniczające W_f	str. 242
$Pr_a^b(f, n)$	metoda prostokątów, całkowanie numeryczne	str. 249
$Tr_a^b(f, n)$	metoda trapezów, całkowanie numeryczne	str. 249
$Si_a^b(f, n)$	metoda Simpsona, całkowanie numeryczne	str. 249

Skorowidz

aksjomat ciągłości, ORD 3, 5

aksjomaty

 funkcji sinus i kosinus, 94

 liczb dodatnich

 ORD 1, 1

 ORD 2, 1

algorytm

 Newtona, 185

 Picarda, 182

 połowienia, 84

 wyznaczania

 maksimum funkcji, 86

 miejsca zerowego funkcji, 84

 złotego podziału, 87

asymptota

 pionowa, 117

 pozioma, 117

 ukośna, 117

 funkcji wymiernej, 118

badanie funkcji, 157

 tabela, 159

całka

 dolna, 190

 górna, 190

 Lebesgue'a, 243

 nieoznaczona, 223

 niewłaściwa, 217

 II rodzaju, 221

 Poissona, 218

 Riemanna, 191

 jako miara, 244

 na przedziale, 191

 notacja, 194

całkowalność

 kryterium Riemanna, 192

 lokalna, 198

całkowanie numeryczne

 metoda prostokątów, 246

 metoda Simsona, 249

 metoda trapezów, 248

ciąg

 Fibonacciego, 21

 geometryczny, 27

 iterowany, 180

 Newtona, 184

ciąg liczbowy, 20

 Cauchy'ego, 47

 granica dolna, 35

 granica górna, 35

 kresy, 21

 monotoniczny, 22

 niemalejący, 22

 nierosnący, 22

 ograniczony, 21

 podciąg, 43

 prawie wszystkie wyrazy, 23

 punkt skupienia, 43

 rozbieżny, 23

 do nieskończoności, 40

 ściśle monotoniczny, 22

 wyrazy, 20

 zbieżny, 23

ciągłość funkcji, 77

 potęgowej, 88

 trygonometrycznych, 90

 warunek Cauchy'ego, 82

 według Heinego, 77

- wykładniczej, 88
- zmiennej rzeczywistej, 77
 - jednostajna, 83
 - lewostronna, 81, 83
 - na zbiorze, 77
 - prawostronna, 81, 82
 - w punkcie, 77
 - w sensie Cauchy'ego, 82
 - własność Darboux, 83
- cos, *zob.* funkcja kosinus
- część całkowita, 8
- długość
 - łuku, 213
 - niezależność od parametryzacji, 213
 - przedziału, 233
- funkcja
 - całkowalna w sensie Riemanna, 191
 - ciągła, 77
 - cyklotometryczna, 94
 - pochodne, 133
 - Dirichleta, 110
 - elementarna, 87
 - klasy C^1 , 154
 - klasy C^∞ , 155
 - rozwinięcie w szereg potęgowy, 155
 - klasy C^k dla $k \geq 0$, 154
 - kosinus, 89
 - aksjomaty, 94
 - pochodna, 128
 - szereg potęgowy, 99
 - Lebesguea–Cantora, 122
 - logarytm
 - naturalny, 93
 - o podstawie a, 93
 - pochodna, 128
 - rozwinięcie w szereg, 129
 - malejąca, 91
 - monotoniczna, 91
 - na rodzinie zbiorów
 - σ –addytywna, 233
 - monotoniczna, 233
 - niemalejąca, 91
 - nierosnąca, 91
 - nierozwijalna w szereg potęgowy, 156
 - odwrotna, 76
 - pierwotna, 205
 - potęgowa, 87
 - pochodna, 132
 - wypukłość, 145
 - przyrostowa w punkcie, 127
 - równość dwu funkcji, 75
 - rosnąca, 91
 - różniczkowalna, 125
 - w punkcie, 124
 - rzeczywista
 - dziedzina, 74
 - kresy, 74
 - obcięcie do zbioru, 75
 - ograniczona, 74
 - oscylacja w punkcie, 107
 - przeciwobraz zbioru, 76
 - różnowartościowa, 74
 - złożenie funkcji, 76
 - zmiennej rzeczywistej, 74
 - schodkowa, 239
 - ściśle
 - monotoniczna, 91
 - wypukła, wklęsła, 143
 - signum, 3
 - sinus, 89
 - aksjomaty, 94
 - pochodna, 128
 - szereg potęgowy, 99
 - tożsamościowa, 75
 - trygonometryczna, 94
 - wielomianowa, *zob.* wielomian
 - wklęsła, 143
 - wykładnicza, 49
 - o podstawie e, 51
 - pochodna, 128
 - rozwinięcie w szereg, 65
 - wypukłość, 145
 - wymierna, 78
 - asymptoty, 118
 - całka nieoznaczona, 229
 - granice, 31, 42, 117
 - rozkład na ułamki proste, 228
 - wypukła, 143
 - zmiennej rzeczywistej, 74
 - granice jednostronne, 110
 - granice niewłaściwe, 114
 - granice w ∞ , $-\infty$, 111
 - pochodna, 125
 - różniczkowalna, 125

- zweżająca, 182
- granica
 - ciągu, 23
 - dolna, 35
 - górna, 35
 - niewłaściwa, 40
 - funkcji, 110
 - lewostronna, 109, 115
 - niewłaściwa, 115
 - prawostronna, 109, 114
 - w nieskończoności, 111
- identyczność, *zob.* funkcja tożsamościowa
- iloraz różnicowy, 124
- kres dolny
 - funkcji, 74
 - zbioru, 12
- kres górny
 - funkcji, 74
 - zbioru, 12
- kres zbioru
 - kryterium porównawcze, 13
- Leibniza ciąg, *zob.* wzór Leibniza
- lemat
 - Carathéodory'ego, 126
 - Fermata, 134
- liczba
 - Eulera e , 28
 - suma szeregu, 32
 - Pi π , 98
 - szereg Leibniza, 133
 - tożsamość Machina, 174
- \ln , *zob.* funkcja logarytm naturalny
- maksimum, 6
- maksimum funkcji, 85
 - lokalne, 86
 - ściśle, 140
- metoda
 - iteracji Picarda, 180
 - połowienia, 84
 - prostokątów, 246
 - wzór, 249
 - przyspieszania zbieżności
 - ciągu naprzemiennego, 216
 - szeregu naprzemiennego, 58
- Simpsona, 247, 249
 - wzór, 249
- stycznych Newtona, 184
- trapezów, 247, 248
 - wzór, 249
- złotego podziału, 86
- miara
 - dyskretna, 237
 - Lebesgue'a, 238
 - zbioru przeliczalnego, 239
 - na σ -ciele, 237
 - skończona, 237
- mieszanina ciągów, 45
- minimum, 6
- minimum funkcji, 85
 - lokalne, 86
 - ściśle, 140
- nierówność trójkąta, 3
- objętość
 - bryły obrotowej, 212
 - figury przestrzennej, 212
 - kuli, 212
- ograniczenie
 - dolne, 11
 - górne, 11
- oscylacja funkcji, 107
- permutacja zbioru \mathbb{N} , 70
- pierwiastek
 - stopnia n , 15
 - stopnia nieparzystego, 77
- pochodna
 - funkcji odwrotnej, 131
 - iloczynu funkcji, 130
 - ilorazu funkcji, 131
 - złożenia funkcji, 131
- pochodna funkcji, 125
 - druga, 140
 - jednostronna, 124
 - logarytmiczna, 133
 - notacja, 127
 - rzędu k , 154
 - trzecia, 149
 - w punkcie, 124
 - lewostronna, 124
 - prawostronna, 124

- podział przedziału, 188
 - podpodział, 188
 - średnica, 189
- pokrycie otwarte zbioru, 106
- pole
 - figury płaskiej, 211
 - koła, 208
 - pod wykresem funkcji, 240
 - prostokąta, 191
- potęga
 - o wykładniku rzeczywistym, 17
 - ułamkowa, 17
- przedział
 - charakteryzacja, 14
 - domknięty, otwarty, 4
 - skończony, nieskończony, 4
 - wnętrze, 103
- punkt
 - krytyczny funkcji, 135
 - lokalnego
 - ekstremum funkcji, 134
 - maksimum, 86
 - minimum, 86
 - przebiegu funkcji, 149
 - stały, 179
 - wyznaczanie metodą iteracji, 181
- punkty
 - nieciągłości funkcji, 107
 - monotonicznej, 120
 - skupienia ciągu, 43
 - wewnętrzne zbioru, 102
- różniczka funkcji, 226
- różniczkowalność
 - warunek konieczny, 127
- reguła
 - de L'Hôpitala, 150, 151
- relacja mniejszości, 2
 - własności, 2
- rozkład
 - funkcji wymiernej na ułamki proste, 228
 - wielomianu na czynniki, 228
- rozwiniecie
 - liczby
 - binarne, 10
 - dziesiętne, 9
 - w szereg potęgowy
 - funkcji arc tg, 133
 - funkcji arc sin, 170
 - funkcji ln, 129
 - funkcji potęgowej, 167
 - funkcji sinus i kosinus, 99
 - funkcji wykładniczej, 65, 98
 - kontrprzykład, 156
 - o środku w x_0 , 155
- σ -ciało, 234
 - generowane, 235
 - zbiorów borelowskich, 235
- sin, *zob.* funkcja sinus
- średnica podziału, 189
- stała Eulera–Mascheroniego γ , 220
- styczna do wykresu funkcji, 126
- suma
 - częściowa szeregu, 54
 - Darboux, 189
 - Riemanna, 195
 - szeregu, 54
- szereg
 - anharmoniczny, 57
 - suma, 129
 - bardzo wolno zbieżny, 172
 - geometryczny, 55
 - harmoniczny, 55
 - stopnia a , 61
 - uogólniony, 169
 - harmoniczny st. 2, 55
 - Leibniza, 133
 - zbieżny do e , 55
- szereg liczbowy, 54
 - iloczyn Cauchy'ego, 72
 - kryterium zbieżności
 - całkowe, 219
 - Cauchy'ego, 69
 - d'Alemberta, 62
 - Dirichleta, 64
 - Leibniza, 57
 - porównawcze, 62
 - naprzemienny, 57
 - przyspieszanie zbieżności, 58
 - przekształcenie Abela, 64
 - zbieżny, 54
 - łączność sumy, 56
 - bezwzględnie, 62
 - warunkowo, 62

- szereg potęgowy, 67
 - całka, 224
 - ciągłość, 100
 - dwumianowy, 167
 - pochodna, 128
 - promień zbieżności, 68, 69
 - przedział zbieżności, 68
- topologia, 102
 - naturalna na prostej, 103
- twierdzenie
 - Abela, 100
 - Banacha o punkcie stałym, 183
 - Bolzano–Weierstrassa, 43
 - Brouwera o punkcie stałym, 179
 - Cauchy’ego o wartości średniej, 150
 - Darboux, 195
 - Heinego o jednostajnej ciągłości, 83
 - Heinego–Borela, 106
 - Lagrange’a, 136
 - Lebesgue’a, 243
 - o całkowalności, 196
 - o całkowaniu przez części, 208
 - o charakteryzacji całki przez funkcje schodkowe, 240
 - o ciągłości
 - funkcji odwrotnej, 92
 - funkcji wypukłej, 147
 - sumy szeregu potęgowego, 100
 - złożenia funkcji, 79
 - o funkcji odwrotnej, 76
 - o geometrycznej interpretacji całki, 242
 - pochodnej, 125
 - o iloczynie szeregów, 71
 - o interpolacji, 251
 - o jednoznaczności funkcji \sin i \cos , 97
 - o lokalnej całkowalności, 198
 - o monotoniczności, 137
 - całki, 192
 - o nierówności dla funkcji wypukłej, 145
 - o odwracalności funkcji różniczkowalnej, 138
 - o pierwiastkowaniu, 15
 - o pochodnej
 - szeregu potęgowego, 128
 - złożenia i funkcji odwrotnej, 131
 - o podciągach, 43
 - o potęgowaniu, 50
 - o produkcie zbiorów borelowskich, 236
 - o przemienności sumy szeregu, 70
 - o równości granic, 40
 - o równoważności def. Cauchy’ego i Heinego, 112
 - o rozkładzie na ułamki proste, 228
 - o różniczkowalności funkcji wypukłej, 148
 - o szeregu dwumianowym, 167
 - o trzech ciągach, 30
 - o wartości średniej dla całki, 203
 - o warunkach dostatecznych ekstremum, 140
 - o zamianie zmiennych w całce, 207
 - o zbieżności szeregu potęgowego, 67
 - o zbiorach otwartych w \mathbb{R} , 105
 - Peano, o reszcie, 163
 - Picarda o zbieżności, 182
 - podstawowe tw. rachunku całkowego, 204
 - Rolle’a
 - rozszerzone, 135
 - uogólnione, 165
 - Weierstrassa, 85
- własność Darboux
 - funkcji ciągłej, 83
 - pochodnej, 136
- Wallisa ciąg, *zob.* wzór Wallisa
- wartość bezwzględna, 2
- warunek
 - istnienia
 - lokalnego ekstremum, 140
 - silnego ekstremum, 141
 - Lipchitza, 183
 - Riemanna, 192
- wielkość, 34
- wielomian, 78
 - rozkład na czynniki, 228
 - Taylora funkcji, 162
- wielomiany interpolacyjne, 251
- współczynniki dwumianowe
 - Newtona, 7
 - rzeczywiste, 166

- wypukłość, wklęsłość funkcji, 143
 - interpretacja geometryczna, 143, 147
 - podstawowa nierówność, 145
 - warunki dostateczne, 144
 - warunki równoważne, 143
- wzór
 - całkowy Newtona–Leibniza, 206
 - dwumianowy Newtona, 7
 - Leibniza, 24, 133
 - Machina, 174
 - Poissona, 218
 - Stirlinga, 142, 214
 - Taylora, 163
 - z resztą całkową, 209
 - z resztą Lagrange’a, 163
 - Wallisa, 24
 - dowód, 214
 - przyspieszanie zbieżności, 215
- złota proporcja, 24
- zasada indukcji, 5
- zbiór
 - borelowski, 235
 - Cantora, 123
 - miara Lebesgue’a, 239
 - domknięty, 102
 - liczb
 - całkowitych, 6
 - naturalnych, 5
 - wymiernych, 6
 - nieograniczony, 11
 - charakteryzacja, 23
 - ograniczeń
 - dolnych, 12, 35
 - górných, 11, 35
 - ograniczony, 11
 - z dołu, z góry, 11
 - otwarty, 102
 - pod wykresem funkcji nieujemnej, 240
 - pomijalny, 242
 - punktów nieciągłości, 107
 - typu G_δ , F_σ , 103
- zbieżność ciągu
 - monotonicznego, 25
 - warunek konieczny, 25
- zbieżność szeregu
 - bezwzględna, 60
- kryterium
 - całkowe, 219
 - Cauchy’ego, 69
 - d’Alemberta, 62
 - Dirichleta, 64
 - Leibniza, 57
 - porównawcze, 62
 - o wyrazach nieujemnych, 60
 - warunek Cauchy’ego, 60
 - warunek konieczny, 60
 - warunkowa, 62

Bibliografia

- [1] Igor N. Bronsztejn, Konstantin A. Siemiendiajew, Matematyka Poradnik Encyklopedyczny, Wyd. 20, Warszawa, 2017.
- [2] Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye A Course in Calculus and Real Analysis. Springer, 2006.
- [3] Michael D. Hirschhorn, A Simple Proof that $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Springer Science+Business Media, LLC, Vol. 33(3), 81-82, 2011.
- [4] Wojciech Kryszewski, Wykład analizy matematycznej. Cz. I, Funkcje jednej zmiennej. WN UMK, Toruń 2009.
- [5] Serge Lang, Undergraduate Analysis. Second Edition, Springer, 1997.

Grzegorz Andrzejczak – Analiza I. Materiał do wykładu

ISBN 978-83-7283-984-8